



Analyse d'erreur a-posteriori pour quelques méthodes d'éléments finis mixtes pour le problème de transmission Stokes-Darcy : Discrétisations isotrope et anisotrope

Wilfrid Koffi Houedanou

► To cite this version:

Wilfrid Koffi Houedanou. Analyse d'erreur a-posteriori pour quelques méthodes d'éléments finis mixtes pour le problème de transmission Stokes-Darcy : Discrétisations isotrope et anisotrope. Mathématiques [math]. Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP), 2015. Français. NNT : . tel-01373344

HAL Id: tel-01373344

<https://hal.science/tel-01373344>

Submitted on 28 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université d'Abomey-Calavi (UAC)-République du Bénin
Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP)
The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP)

Doctorat unique de l'Université d'Abomey-Calavi

Option : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Thèse présentée et soutenue publiquement le 11 Décembre 2015

Par

HOUEDANOU Koffi Wilfrid

Titre

Analyse d'erreur a-posteriori pour quelques méthodes d'éléments finis mixtes pour le problème de transmission Stokes-Darcy : Discrétisations isotrope et anisotrope.

1

Composition du Jury

Président : **TOSSA Joël**, Professeur (Université d'Abomey-Calavi, Bénin)

Rapporteurs : **-NICAISE Serge**, Professeur (Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis, France)

-SECK Diaraf, Professeur (Université Cheik Anta Diop de Dakar, Sénégal)

-LEADI Liamidi, Maître de Conférences (Université d'Abomey-Calavi, Bénin)

Examineur : **MARCOS Aboubacar**, Maître de Conférences (Université d'Abomey-Calavi, Bénin)

Directeurs de thèse : Professeur **NICAISE Serge** (Université de Valenciennes, France)

Docteur **AHOUNOU Bernadin** (Université d'Abomey-Calavi, Bénin)

1. Supportée par le Centre International de la Physique Théorique (ICTP), Trieste, Italie.

Dédicace

À ma Mère, GUIDIHUN Ayaba Bibiane ;
À la mémoire de mon Père, HOUEDANOU Codjo Félicien ;
Avec amour et admiration.

Remerciements

Les premières lignes de cette page s'adressent naturellement à mes deux directeurs de thèse, Monsieur **Serge Nicaise** (Professeur à l'Université de Valenciennes, Directeur du Laboratoire de Mathématiques et ses Applications de Valenciennes, France) et Monsieur **Bernadin Ahounou** (Professeur à l'Université d'Abomey-Calavi, Bénin) qui ont encadré cette thèse avec une attention constante. De leurs larges connaissances scientifiques, de leur rigueur et de leur démarche pédagogique, j'ai beaucoup appris. La patience et la disponibilité qu'ils ont eues à mon égard m'ont permis d'avoir de nombreuses discussions dont le fruit est cette thèse. Je voudrais leur exprimer ici ma profonde gratitude.

Mes remerciements vont aussi au **Centre International de la Physique Théorique (Abdus Salam)** pour avoir supporté financièrement cette thèse durant trois ans.

Je remercie les **membres du jury et les rapporteurs** d'avoir accepté de lire cette thèse.

Je tiens à remercier le Directeur de l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP, Bénin), Professeur **Joël Tossa**, ainsi que son adjoint, le Professeur **Aboubacar Marcos**, pour leurs attentions portées à ma formation.

Je remercie la fondation du **Prix Ibni Oumar Mahamat Saleh** qui m'a permis de faire un séjour scientifique de trois mois au Laboratoire de Mathématiques et ses Applications de Valenciennes (LAMAV) en France.

Je remercie très sincèrement Monsieur **Aurélien Goudjo**, Professeur à l'Université d'Abomey-Calavi, pour m'avoir initié aux tests numériques.

Je remercie Monsieur **Emmanuel Creusé**, Professeur à l'Université de Lille 1. En effet, il m'a consacré une partie de son précieux temps pour de nombreuses discussions sur les tests numériques. Merci à Madame **Carmelle Toudonou**, Journaliste à l'ORTB, pour son aide.

Enfin, mes pensées vont **aux membres de ma famille**. Bien qu'ils étaient parfois loin, ils m'ont toujours soutenu et encouragé. Et merci à mon épouse **Gisèle Assokpé**

pour son soutien moral.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la discrétisation et à l'analyse d'erreur a-posteriori de type résiduel des équations du problème couplé Stokes-Darcy. Ces équations modélisent l'écoulement d'un fluide visqueux vers un milieu poreux à travers une interface. La formulation faible que nous utilisons ne contient pas de multiplicateurs de Lagrange sur l'interface. La méthode d'éléments finis employée est, soit conforme, soit non-conforme.

Dans un premier temps, nous considérons une discrétisation isotrope. Nous utilisons une variante de la méthode d'éléments finis non-conforme de Crouzeix-Raviart [53] pour approcher la vitesse du fluide dans Ω (Ω étant la réunion des deux domaines, y compris l'interface). La pression du fluide dans Ω est approchée dans l'espace des fonctions constantes par morceaux. Nous démontrons la stabilité du problème discret associé en nous inspirant de [98]. Nous proposons une famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori, avec lesquels nous faisons une analyse d'erreur a-posteriori. La majoration globale de la norme de l'erreur et la minoration locale de la semi-norme de l'erreur forment les résultats principaux de cette étude. Ainsi, nous montrons que ces indicateurs d'erreur a-posteriori sont fiables et efficaces.

Dans un second temps, nous considérons une extension de ces résultats à une discrétisation anisotrope. Nous utilisons une généralisation de l'inégalité de Korn discrète pour montrer que le problème approché admet une solution unique. Ensuite, nous effectuons une analyse d'erreur a-posteriori en partant de la technique de [52, Sec. 6].

Entre autres, nous étudions une méthode d'approximation conforme à l'aide d'une discrétisation anisotrope. Nous proposons une famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori. Nous développons ensuite une analyse d'erreur a-posteriori en fonction de ces indicateurs en nous inspirant de la technique développée dans [52, Section 6]. En outre, nous montrons que cette famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori est fiable et efficace. Nous obtenons une nouvelle famille optimale d'indicateurs d'erreur locaux pour le cas spécifique où la discrétisation est isotrope.

Mots-clés : *Problème de transmission Stokes-Darcy, Analyse d'erreur a-posteriori, Méthode d'éléments finis.*

Mathematics Subject Classification [MSC] : *70S05, 74S10, 74S15, 74S20, 74S25.*

Table des matières

Liste des notations	9
Liste des tableaux	14
Table des figures	15
1 Introduction	18
1.1 Motivations	18
1.2 Modèle associé au problème couplé Stokes-Darcy	19
1.3 Généralité sur l'analyse d'erreur a-posteriori	21
1.3.1 Principes généraux et propriétés	21
1.3.2 Les estimations d'erreur a-posteriori de type résiduel	25
1.4 Objectifs de la thèse et résultats obtenus	29
1.4.1 Objectifs de la thèse	29
1.4.2 Résultats obtenus	30
1.5 Plan de la thèse	31
2 Préliminaires	35
2.1 Introduction	35
2.2 Quelques espaces fonctionnels	36
2.2.1 Les espaces de Sobolev classiques	36
2.2.2 Recollement d'espaces de Sobolev	39
2.2.3 Espaces particuliers	39
2.3 Discrétisations	41
2.3.1 Triangulation conforme	41
2.3.2 Élément de référence, transformation affine et sous domaines auxiliaires	42

2.3.3	Discrétisation isotrope	45
2.3.4	Discrétisation anisotrope	45
	Notations d'un triangle et d'un tétraèdre	45
	Quantités anisotropes	47
	Hypothèses sur la triangulation et sur les mailles	50
2.4	Propriétés de quelques éléments finis	51
2.4.1	Éléments finis de Crouzeix-Raviart	51
	Description géométrique	51
	Définitions et propriétés	52
2.4.2	Éléments finis de Nédélec	55
2.5	Outils d'analyse	55
2.5.1	Opérateurs d'interpolation de Clément-Cas isotrope	56
2.5.2	Fonctions bulles, opérateurs d'extensions et inégalités inverses	58
2.5.3	Formules de Green	61
2.5.4	Généralisation de certains outils dans le cas d'une discrétisation anisotrope	61
2.5.5	Inégalités de trace et de Young	62
2.6	Inégalité de Korn classique	63
2.7	Formulation faible associée au problème couplé Stokes-Darcy	65
2.8	Conclusion	70
3	<i>Analyse d'erreur a-posteriori d'une méthode d'éléments finis mixtes non-conforme sur une discrétisation isotrope</i>	71
3.1	Introduction	71
3.2	Approximation par éléments finis non-conformes isotropes	72
3.2.1	Problème discret	73
3.2.2	Inégalité de Korn discrète sur une discrétisation isotrope	76
3.2.3	Existence et l'unicité d'une solution du problème discret	82
	Continuité des formes discrètes	82
	Coercivité de la forme bilinéaire A_h	82
	Condition inf-sup de la forme bilinéaire \mathbf{b}_h	86
3.3	Estimation d'erreur a-priori	87
3.4	Quelques résultats techniques	91
3.4.1	Décomposition de Helmholtz	93
3.4.2	Résultat de régularité	96
3.4.3	Opérateur d'interpolation de Oswald	98

3.5	Analyse d'erreur a-posteriori	105
3.5.1	Indicateurs d'erreur a-posteriori	105
	Résidus exacts-résidus approchés	105
	Définition des indicateurs d'erreur a-posteriori	106
3.5.2	Majoration d'erreur a-posteriori	107
3.5.3	Minoration d'erreur a-posteriori	114
3.6	Conclusion	122
4	<i>Analyse d'erreur a-posteriori d'une méthode d'éléments finis mixtes non-conforme sur une discrétisation anisotrope</i>	123
4.1	Introduction	123
4.2	Approximation par éléments finis non-conformes anisotropes	124
4.2.1	Problème discret	124
4.2.2	Inégalité de Korn discrète sur une discrétisation anisotrope	126
4.2.3	Existence et l'unicité d'une solution du problème discret	133
	Continuité des formes discrètes	134
	Coercivité de la forme bilinéaire C_h	134
	Condition inf-sup de la forme bilinéaire \mathbf{b}_h	137
4.3	Relation entre maillage anisotrope et fonction anisotrope	142
4.3.1	Mesures d'alignements	142
4.3.2	Propriétés sur les mesures d'alignements	142
4.3.3	Estimations d'interpolation de Clément-Cas anisotrope	146
4.4	Analyse d'erreur a-posteriori	146
4.4.1	Indicateurs d'erreur a-posteriori	147
4.4.2	Majoration d'erreur sur la pression	148
4.4.3	Minoration d'erreur a-posteriori	152
4.5	Conclusion	160
5	<i>Analyse d'erreur a-posteriori d'une méthode d'éléments finis mixtes conforme sur une discrétisation anisotrope</i>	161
5.1	Introduction	161
5.2	Approximation par éléments finis conformes	162
5.2.1	Problème discret	162
5.2.2	Existence et l'unicité d'une solution du problème discret	163
5.3	Analyse d'erreur a-posteriori	164
5.3.1	Indicateurs d'erreur a-posteriori	164

Equation des résidus	164
Définition des indicateurs d'erreur a-posteriori	165
5.3.2 Majoration d'erreur a-posteriori	167
5.3.3 Minoration d'erreur a-posteriori	174
5.3.4 Application aux discrétisations isotropes	184
5.4 Conclusion	185
6 Quelques résultats numériques	186
6.1 Domaines et maillages	186
6.2 Convergence dans Ω_s	188
6.3 Convergence dans Ω_d	190
6.4 Les courbes d'isovaleurs	190
6.5 Matrice de rigidité	190
6.6 Représentation des solutions exactes	193
7 Conclusion et Perspectives	195
7.1 Conclusion	195
7.2 Perspectives	196
Bibliographie	197

Liste des notations

Dans ce manuscrit, on utilisera les notations suivantes :

1. \mathbb{R} espace vectoriel des nombres réels
2. \mathbb{N} ensemble des entiers naturels
3. $\mathcal{L}(V; \mathbb{R}) = V'$ le dual topologique d'un espace vectoriel V
4. $\mathbb{R}^{N \times N}$ l'espace vectoriel des matrices réelles de tailles $N \times N$, $N \in \{2, 3\}$
5. \mathbb{X}^{Tr} transposé d'une matrice ou d'un vecteur \mathbb{X}
6. $\det(\mathbb{M})$ déterminant d'une matrice carrée \mathbb{M}
7. \mathbb{I} matrice unité de $\mathbb{R}^{N \times N}$
8. $\text{diag}\{a_1, \dots, a_N\} := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_N \end{pmatrix}$
9. K ouvert borné de \mathbb{R}^N à bord ∂K lipschitzien
10. Ω_s ouvert borné à bord $\partial\Omega_s$ polygonal (si $N = 2$) ou polyédral (si $N = 3$) représentant le milieu fluide
11. Ω_d ouvert borné à bord $\partial\Omega_d$ polygonal (si $N = 2$) ou polyédral (si $N = 3$) représentant le milieu poreux
12. Γ_I l'interface $\partial\Omega_s \cap \partial\Omega_d$
13. Γ_s le bord $\partial\Omega_s$ privé de Γ_I
14. Γ_d le bord $\partial\Omega_d$ privé de Γ_I
15. $\Omega_s^+ := \Omega_s \cup \Gamma_s = \bar{\Omega}_s \setminus \Gamma_I$
16. $\Omega = \Omega_s \cup \Gamma_I \cup \Omega_d$ le domaine global
17. \mathbf{n}_l normale unitaire extérieure à Ω_l , $l = s$ ou d

18. τ_j vecteurs tangents à l'interface Γ_I , $j = 1, \dots, N - 1$
19. $\mathbb{P}^m(K)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à m sur K
20. $C^m(K)$ l'espace des fonctions m fois continûment dérivables sur K
21. $C^{0,1}(\bar{\Omega}_d) := \{v \in C^0(\bar{\Omega}_d) : v \text{ lipschitzienne dans } \bar{\Omega}_d\}$
22. $\mathcal{D}(K)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur K à support compact contenu dans K
23. $\mathcal{D}'(K)$ l'espace des distributions sur $\mathcal{D}(K)$
24. $L^2(K)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur K
25. $L_0^2(K)$ l'espace des fonctions de carré intégrable, de moyenne nulle sur K
26. $L^\infty(K)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées
27. $H^m(K)$ l'espace de Sobolev des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^2(K)$
28. $H_0^m(K)$ la fermeture de $\mathcal{D}(K)$ dans $H^m(K)$
29. $H^{-1}(K)$ le dual topologique de $H_0^1(K)$
30. $H(\mathbf{div}, K) := \{\psi \in [L^2(K)]^N : \operatorname{div} \psi \in L^2(K)\}$
31. $H_0(\mathbf{div}, K) := \{\psi \in H(\mathbf{div}; K) : \psi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial K\}$
32. $H(\mathbf{rot}, K) := \{\psi \in [L^2(K)]^N : \mathbf{rot} \psi \in [L^2(K)]^{2N-3}\}$, $N = 2$ ou $N = 3$
33. $H_0(\mathbf{rot}, K) := \{\psi \in H(\mathbf{rot}; K) : \psi \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial K\}$
34. $(\cdot, \cdot)_K$ le produit scalaire dans $L^2(K)$
35. $(\cdot, \cdot)_{m,K}$ le produit scalaire dans $H^m(K)$ ou dans $[H^m(K)]^N$
36. $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^N}$ produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^N
37. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_I}$ crochet de dualité sur $H^{-1/2}(\Gamma_I) \times H^{1/2}(\Gamma_I)$
38. ∇u l'opérateur gradient de u (en colonne)
39. Δu l'opérateur laplacien de u
40. $\|\cdot\|$ la norme sur $L^2(\Omega)$
41. $\|\cdot\|_T$ la norme sur $L^2(T)$
42. $\|\cdot\|_E$ la norme sur $L^2(E)$
43. $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{N \times N}}$ la norme spectrale d'une matrice
44. $\|\cdot\|_{m,K}$ la norme sur l'espace de Sobolev $H^m(K)$ ou sur $[H^m(K)]^N$
45. $\|\cdot\|_{1,\Omega_l}$ la norme sur l'espace de Sobolev $[H^1(\Omega_l)]^N$, $l = s$ ou d

46. $\|\cdot\|_{1/2,\partial K}$ la norme sur l'espace de Sobolev fractionnaire $H^{1/2}(\partial K)$
47. $|\cdot|_{\mathbb{R}^N}$ la norme euclidienne d'un vecteur de \mathbb{R}^N
48. $|\cdot|_{m,K}$ la semi-norme sur l'espace de Sobolev $H^m(K)$ ou sur $[H^m(K)]^N$
49. \mathcal{T}_h triangulation de Ω
50. $[H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N := \{\mathbf{w} \in [H^1(K)]^N : \mathbf{w}|_T = \mathbf{w}_T \in [\mathbb{P}^1(T)]^N, \forall T \in \mathcal{T}_h\}$
51. \mathcal{T}_h^s triangulation de Ω_s
52. $\|\mathbb{D}_{\mathcal{T}_h^s}(\psi)\|_{\Omega_s} := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\mathbb{D}(\psi)\|_T^2 \right)^{1/2}$
53. \mathcal{T}_h^d triangulation de Ω_d
54. T triangle ou tétraèdre
55. $|T|$ aire ($N = 2$) ou volume ($N = 3$) de T
56. \bar{T} triangle ou tétraèdre de référence
57. E arête ou face de T
58. $|E|$ longueur ($N = 2$) ou l'aire ($N = 3$) de E
59. \mathcal{E}_h ensemble de toutes les arêtes ou faces de \mathcal{T}_h
60. \mathcal{E}_h^s ensemble de toutes les arêtes ou faces de \mathcal{T}_h^s
61. \mathcal{E}_h^d ensemble de toutes les arêtes ou faces de \mathcal{T}_h^d
62. $\mathcal{E}(T)$ ensemble de toutes les arêtes ou faces de T
63. $\mathcal{E}_h(K)$ ensemble de toutes les arêtes ou faces de \mathcal{T}_h incluses dans K
64. \mathcal{N}_h ensemble des nœuds de \mathcal{T}_h
65. $\mathcal{N}(T)$ ensemble des nœuds de T
66. $\mathcal{N}_h(K)$ ensemble des nœuds de \mathcal{T}_h appartenant à K
67. F_T application linéaire affine de \bar{T} sur T
68. $a \lesssim b$: il existe une constante positive C indépendante de a et b telle que $a \leq Cb$
69. $a \sim b$: il existe deux constantes positives C_1 et C_2 indépendantes de a et b telle que $C_1b \leq a \leq C_2b$
70. $\mathbf{n}_E = (n_{E1}, n_{E2})$ normale extérieure d'une arête ou face E
71. $\mathbf{t}_E = (-n_{E2}, n_{E1})$ vecteur tangent à l'arête ou face E
72. $\text{diam}(E)$ diamètre de E

73. h_T diamètre d'une maille T
74. W_T réunion des éléments partageant une arête ou face commune avec T
75. W_E réunion des éléments partageant l'arête ou face E
76. $W_{\mathbf{x}}$ réunion des éléments partageant le nœud \mathbf{x}
77. \tilde{w}_T réunion des éléments partageant un nœud avec T
78. \tilde{w}_E réunion des éléments partageant un nœud avec E
79. $\mathbf{p}_{i,T}$ vecteurs anisotropes d'une maille anisotrope T , $i = 1 \dots N$
80. $h_i = h_{i,T}$ norme $|\mathbf{p}_{i,T}|_{\mathbb{R}^N}$ du vecteur $\mathbf{p}_{i,T}$
81. $h_{\min,T} := \min_{1 \leq i \leq N} \{h_{i,T}\} = h_{N,T}$
82. $h_{E,T}$ la hauteur issue du sommet opposé à E sur E dans une maille T
83. h_E la quantité $(h_{E,T_1} + h_{E,T_2})/2$ pour $E = \partial T_1 \cap \partial T_2$
84. $h_{\min,E}$ la quantité $(h_{\min,T_1} + h_{\min,T_2})/2$ pour $E = \partial T_1 \cap \partial T_2$
85. $[\phi]_E$ le saut de ϕ à travers l'arête ou face E
86. $\lambda_{i,T}$ fonctions coordonnées barycentriques associées à T
87. b_T fonction bulle associée à T
88. F_{ext} opérateur d'extension $F_{ext} : C^0(E) \longrightarrow C^0(T)$
89. $\delta_{i,j}$ symbole de Kronecker
90. (\mathbf{u}, p) solutions exactes
91. (\mathbf{u}_h, p_h) solutions approchées
92. $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ erreur d'approximation pour la vitesse dans Ω
93. $\varepsilon := p - p_h$ erreur d'approximation pour la pression dans Ω
94. $\mathbf{R}_{s,T} := \mathbf{f} + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h$ résidu exact sur $T \in \mathcal{T}_h^s$
95. $\mathbf{R}_{d,T} := \mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h$ résidu exact sur $T \in \mathcal{T}_h^d$
96. \mathbf{f}_T approximation de la donnée \mathbf{f} dans T
97. $\mathbf{r}_{s,T} := \mathbf{f}_T + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h$ résidu approché sur $T \in \mathcal{T}_h^s$
98. $\mathbf{r}_{d,T} := \mathbf{f}_T - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h$ résidu approché sur $T \in \mathcal{T}_h^d$
99. \mathbf{f}_h approximation de la donnée \mathbf{f} dans Ω
100. ζ_T terme d'approximation local associé à T
101. $\zeta := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \zeta_T^2 \right)^{1/2}$ terme d'approximation global

-
- 102. Θ_T indicateur d'erreur local associé à T
 - 103. $\Theta := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Theta_T^2 \right)^{1/2}$ indicateur d'erreur global
 - 104. $I_{cl}^0, I_{cl}, \mathcal{P}_{cl}$ opérateurs d'interpolation de Clément
 - 105. $\gamma_l : u \in H^1(\Omega_l) \mapsto \gamma_l(u) \in H^{1/2}(\partial\Omega_l)$, opérateur trace dans $H^1(\Omega_l)$; $l = s$ ou d .
 - 106. $m(.,.)$ mesure d'alignement
 - 107. \overline{K} la fermeture d'une partie K
 - 108. \mathbf{H}_h l'espace d'approximation des vitesses
 - 109. Q_h l'espace d'approximation des pressions
 - 110. $\text{Card}(A)$ cardinal d'un ensemble fini A

Liste des tableaux

- 2.1 Fonctions bulles et opérateurs d'extensions sur l'élément de référence \overline{T} . 60
- 6.1 Tableau montrant la structure de la matrice de rigidité sur 10 itérations. 192

Table des figures

1.1	Géométrie du problème : cas $\partial\Omega_d \neq \Gamma_I$	19
1.2	Géométrie du problème : cas $\partial\Omega_d = \Gamma_I$	19
1.3	Schéma d'une boucle d'adaptation de maillage.	24
1.4	Exemple de macro-éléments Δ_T centré sur la maille T en $2d$	25
2.1	Exemple d'une triangulation conforme en $2d$	42
2.2	Exemple d'une triangulation non-conforme en $2d$	42
2.3	Sommet \bar{P}_i et l'arête \bar{E}_i correspondante.	42
2.4	Transformation géométrique F_T envoyant l'élément de référence \bar{T} sur un $T \in \mathcal{T}_h$ en $2d$	43
2.5	Sous domaine auxiliaire W_E pour $E \in \mathcal{E}_h(K)$, $K \subset \mathbb{R}^2$	44
2.6	Sous domaine auxiliaire W_E pour $E \in \mathcal{E}_h(K)$, $K \subset \mathbb{R}^3$	44
2.7	Sous domaine auxiliaire W_T pour $T \subset \mathbb{R}^2$	44
2.8	Notation d'un élément isotrope T en $2d$	45
2.9	Directions d'anisotropies pour le triangle.	47
2.10	Directions d'anisotropies pour le tétraèdre.	47
2.11	Élément fini \mathbb{P}^1 non-conforme $2d$	52
2.12	Fonction de base $\bar{\psi}_0$	53
2.13	Fonction de base $\bar{\psi}_1$	53
2.14	Fonction de base $\bar{\psi}_2$	53
2.15	Deux triangles partageant une arête intérieure.	54
2.16	Élément fini de Nédélec en $2d$	55
6.1	Le domaine Ω en $2d$	186
6.2	Maillage uniforme sur le carré unité, avec $n = 200$	188
6.3	Maillage non structuré sur le carré unité, avec $n = 200$	188
6.4	Maillage uniforme sur le domaine couplé, avec $n = 400$	189

6.5	Erreur sur la vitesse dans Ω_s en échelle log/log.	190
6.6	Erreur sur la pression dans Ω_s en échelle log/log.	190
6.7	Erreur sur la vitesse dans Ω_d en échelle log/log.	191
6.8	Erreur sur la pression dans Ω_d en échelle log/log.	191
6.9	Courbe d'isovaleure pour la composante u_1 de la vitesse dans Ω_s sur 10 itérations. .	191
6.10	Courbe d'isovaleure pour la composante u_2 de la vitesse dans Ω_s sur 10 itérations. .	191
6.11	Courbe d'isovaleure pour la composante u_1 de la vitesse dans Ω_d sur 10 itérations. .	192
6.12	Courbe d'isovaleure pour la composante u_2 de la vitesse dans Ω_d sur 10 itérations. .	192
6.13	Composante u_1 de la solution exacte \mathbf{u} dans Ω	193
6.14	Composante u_2 de la solution exacte \mathbf{u} dans Ω	193
6.15	Représentation graphique de la pression sur le domaine Ω	193
6.16	Représentation graphique de la première composante f_1 dans Ω_s	194
6.17	Représentation graphique de la deuxième composante f_2 dans Ω_s	194
6.18	Représentation graphique de la première composante f_1 dans Ω_d	194
6.19	Représentation graphique de la deuxième composante f_2 dans Ω_d	194

Introduction

Sommaire

1.1 Motivations	18
1.2 Modèle associé au problème couplé Stokes-Darcy	19
1.3 Généralité sur l'analyse d'erreur a-posteriori	21
1.4 Objectifs de la thèse et résultats obtenus	29
1.5 Plan de la thèse	31

1.1 Motivations

Le problème de transmission Stokes-Darcy est un problème très étudié. Beaucoup de phénomènes physiques sont modélisés par les équations associées à ce problème [21, 54, 58, 76, 77, 93, 99]. Citons-en quelques exemples : la formation des plages ; la simulation des effets des inondations ; la propagation et la diffusion de polluants contenus dans l'eau ; les interactions entre les eaux souterraines et les eaux de surface ; le transport des contaminants dans les zones cotières, rivières, dans les bassins et dans les lacs ; la circulation du sang à travers certains organes tels que le cerveau, le cœur, le poumon, le rein, etc....

L'analyse d'erreur a-posteriori est en quelques années devenue l'outil de base pour l'adaptation automatique de maillage en éléments finis. Elle consiste à majorer et à minorer l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte par des quantités qui dépendent seulement de la solution discrète et des données du problème étudié. Ces quantités, appelées estimateurs d'erreur a-posteriori, permettent de mesurer la qualité de la solution calculée et fournissent une information pour contrôler l'algorithme d'adaptation de maillage.

L'analyse d'erreur a-posteriori permet aux ingénieurs d'obtenir des résultats numériques

précis sans que le coût de calcul soit trop élevé. Afin d'optimiser les calculs, les estimations d'erreur a-posteriori servent à raffiner certaines parties de la triangulation en fonction de la solution approchée. L'adaptation de maillage est donc devenu un outil important dans l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.

On s'intéresse dans cette thèse à la discrétisation et à l'analyse d'erreur a-posteriori de type résiduel des équations du problème de transmission Stokes-Darcy. L'élaboration des estimateurs d'erreur a-posteriori repose sur des discrétisations isotrope et anisotrope, via des méthodes d'éléments finis mixtes conformes et non-conformes.

1.2 Modèle associé au problème couplé Stokes-Darcy

Ω_s et Ω_d sont deux ouverts bornés de \mathbb{R}^N ($N = 2$ ou $N = 3$) tels que $\partial\Omega_s \cap \partial\Omega_d \neq \emptyset$. On pose $\Gamma_I = \partial\Omega_s \cap \partial\Omega_d$; $\Gamma_l = \partial\Omega_l \setminus \Gamma_I$ pour $l = s$ ou $l = d$ et $\Omega = \Omega_s \cup \Gamma_I \cup \Omega_d$.

On considère dans Ω_s un fluide visqueux qui traverse l'interface Γ_I pour occuper Ω_d . On suppose que Ω_d est un milieu poreux. On désigne par $\mathbf{u}_l : \Omega_l \rightarrow \mathbb{R}^N$ la vitesse du fluide dans Ω_l et $p_l : \Omega_l \rightarrow \mathbb{R}$ sa pression ($l = s$ ou $l = d$). Les Figures 1.1 et 1.2 ci-dessous illustrent ces deux régions avec l'interface Γ_I dans différents cas. Le vecteur \mathbf{n}_l est la normale unitaire extérieure à Ω_l sur $\partial\Omega_l$ et $\{\tau_j\}_{j=1,\dots,N-1}$ est un système orthonormal de vecteurs tangents à Γ_I . Les vecteurs \mathbf{n}_l et τ_j sont des vecteurs lignes.

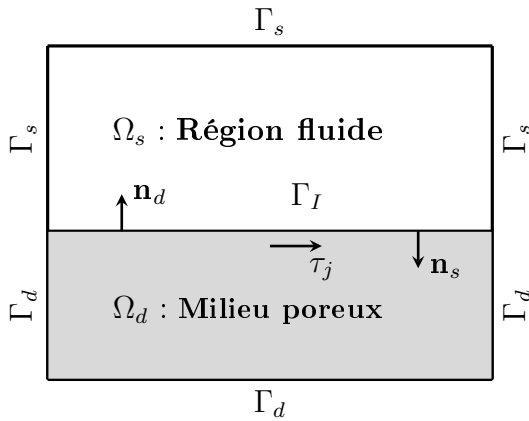


FIGURE 1.1 – Géométrie du problème : cas $\partial\Omega_d \neq \Gamma_I$

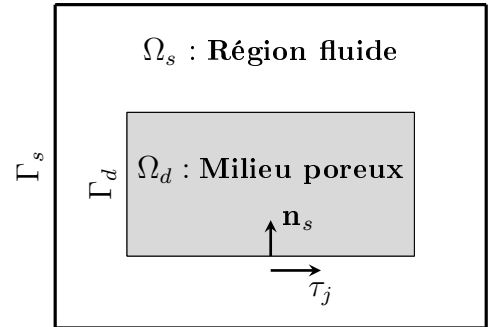


FIGURE 1.2 – Géométrie du problème : cas $\partial\Omega_d = \Gamma_I$.

Le modèle est constitué de trois type d'équations : les équations de Stokes dans Ω_s , les équations de Darcy dans Ω_d et les conditions de transmission sur l'interface Γ_I .

- **Equations de Stokes.** Dans Ω_s , le couple (\mathbf{u}, p) satisfait les équations de Stokes :

$$\begin{cases} -2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_s, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = g & \text{dans } \Omega_s, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_s, \end{cases} \quad (1.1)$$

où \mathbb{D} est le tenseur des déformations linéarisé défini par :

$$\mathbb{D}(\psi)_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (1.2)$$

L'équation (1.1)₁ traduit physiquement la conservation du vecteur quantité de mouvement. La seconde équation (1.1)₂ signifie la conservation de masse. La dernière équation (1.1)₃ est la condition de Dirichlet homogène sur Γ_s .

- **Equations de Darcy.** Dans Ω_d , le couple (\mathbf{u}, p) satisfait les équations de Darcy :

$$\begin{cases} \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_d, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = g & \text{dans } \Omega_d, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_d = 0 & \text{sur } \Gamma_d. \end{cases} \quad (1.3)$$

L'équation (1.3)₁ traduit physiquement la loi de Darcy. La seconde équation (1.3)₂ est la conservation de masse. La condition (1.3)₃ signifie qu'il n'y a pas d'écoulement à travers Γ_d .

La donnée $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$ appartient à l'espace des fonctions vectorielles $[L^2(\Omega)]^N$ tandis que g appartient à $L_0^2(\Omega)$. $\mu > 0$ est la viscosité dynamique du fluide.

$\mathbb{K} : x \in \Omega_d \mapsto \mathbb{K}(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est le tenseur de perméabilité du milieu poreux. On suppose que le tenseur de perméabilité \mathbb{K} est symétrique, uniformément définie positive et satisfaisant la condition suivante, pour $0 < K_* \leq K^* < +\infty$,

$$K_* \xi^T \xi \leq \xi^T \mathbb{K}(x) \xi \leq K^* \xi^T \xi, \quad \forall x \in \Omega_d, \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (1.4)$$

Le gradient de la pression p est défini par $\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_N} \right)$.

- **Conditions de transmission.** Les conditions de transmission sont données par le système :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n}_d & = 0 & \text{sur } \Gamma_I, \\ p_s - 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_s^{Tr} - p_d & = 0 & \text{sur } \Gamma_I, \\ \mathbf{u}_s \cdot \tau_j + \frac{\sqrt{k_j}}{\alpha_1} 2\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_s) \cdot \tau_j^{Tr} & = 0 & \text{sur } \Gamma_I, j = 1, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

L'équation (1.5)₁ traduit physiquement la conservation de masse à travers l'interface. L'équation (1.5)₂ est l'équilibre des forces normales sur l'interface Γ_I . La dernière équation (1.5)₃ est la condition de Beavers-Joseph-Saffman. k_j est un réel strictement positif défini par $k_j = \tau_j \cdot \mu \mathbb{K} \cdot \tau_j^{Tr}$ et $\alpha_1 > 0$. La condition de Beavers-Joseph-Saffman est expérimentalement étudiée par Beavers et Joseph dans [21], modifiée par Saffman dans [99], puis analytiquement justifiée dans [76, 77, 78, 93].

1.3 Généralité sur l'analyse d'erreur a-posteriori

1.3.1 Principes généraux et propriétés

Une phase délicate dans une simulation numérique est la construction du maillage. En effet, si le maillage est trop grossier, la durée des calculs sera courte, mais le résultat ne sera pas satisfaisant car trop approximatif. Par contre, si le maillage est très fin, il y a deux inconvénients : premièrement le calcul sera inutilement long car certaines zones ne nécessitent pas un maillage fin ; deuxièmement, le processus lui-même risque de se terminer par une interruption extérieure (limite de temps dépassée par exemple). Il faut donc trouver un bon compromis de manière à ce que le maillage soit fin uniquement là où cela est nécessaire.

Les estimations d'erreur a-priori fournissent des bornes sur la différence entre la solution exacte (qu'on appelle u) et la solution approchée (qu'on appelle u_h) dans une certaine norme (ou semi-norme) $\|\cdot\|$ sous la forme,

$$\|u - u_h\| \leq Ch^s \|u\|_{H^{s+1}}, \quad s \in \mathbb{N}^*. \quad (1.6)$$

Ces estimations sont utilisées afin de justifier théoriquement la convergence de la méthode numérique employée. Elles sont établies en supposant certaines régularités sur la solution exacte. Ces régularités sont inconnues dans certains cas. De plus, la constante générique C qui apparaît dans l'estimation (1.6) est soit inconnue, soit difficile à estimer. Cependant, la difficulté la plus importante est que la norme $\|\cdot\|_{H^{s+1}}$ n'est pas calculable, simplement parce que la solution exacte u est inconnue explicitement. Donc

en pratique, la borne supérieure de l'estimé (1.6) ne permet pas le contrôle effectif de l'erreur et par suite ne peut pas servir comme critère d'arrêt pour un algorithme de résolution.

Pour pouvoir développer une méthode adaptative, on va avoir recours à des estimations d'erreur a-posteriori.

On appelle *estimation d'erreur a-posteriori*, une estimation de la forme,

$$\| u - u_h \| \leq C \eta(\mathcal{T}_h, D, u_h), \quad (1.7)$$

où C est une constante réelle positive indépendante du paramètre h caractérisant la précision du maillage. La quantité $\eta(\mathcal{T}_h, D, u_h)$ est appelée *estimateur d'erreur a-posteriori* et ne dépend que de la solution approchée u_h , du maillage \mathcal{T}_h et l'ensemble des données du problème modèle considéré, qui est ici désigné par D .

On attribue à un estimateur d'erreur a-posteriori, certaines propriétés qui attestent de sa qualité. Ainsi, il doit satisfaire les trois propriétés suivantes :

• **Propriété de fiabilité.** Une première propriété que doit vérifier un estimateur d'erreur a-posteriori est de satisfaire l'estimation,

$$\| u - u_h \| \lesssim \Theta(\mathcal{T}_h, D, u_h) + \zeta, \quad (1.8)$$

où ζ est une quantité ne dépendant que du second membre et des conditions de bord du problème étudié. La quantité ζ est négligeable devant l'estimateur Θ .

L'estimation (1.8) s'interprète comme une propriété de fiabilité puisqu'elle garantit que l'erreur $\| u - u_h \|$ est effectivement contrôlée par l'estimateur d'erreur a-posteriori.

• **Adaptation de maillage.** Un estimateur d'erreur a-posteriori doit donner des informations sur la distribution locale de l'erreur. Il doit pouvoir être localisé, par exemple sur chaque élément du maillage sous la forme,

$$\Theta(\mathcal{T}_h, D, u_h) = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\Theta_T(h_T, D, u_h))^2 \right\}^{1/2}. \quad (1.9)$$

Alors, on dit que les quantités $\{\Theta_T(h_T, D, u_h)\}_{T \in \mathcal{T}_h}$ sont des indicateurs d'erreur locaux.

Grâce aux estimateurs d'erreur a-posteriori et notamment aux indicateurs d'erreur locaux, on connaît la répartition de l'erreur et l'on sait atteindre uniquement les élé-

ments où elle est la plus élevée. On introduit alors une procédure d'adaptation basée sur ces indicateurs pour raffiner (ou déraffiner) localement le maillage. Un algorithme relativement général d'adaptation de maillage est le suivant :

1. On choisit un maillage initial que l'on note \mathcal{T}_h^0 . On pose $i = 0$.
2. On résout le problème discret sur \mathcal{T}_h^i . On note u_h^i la solution discrète.
3. Sur chaque élément T de \mathcal{T}_h^i , on calcule un indicateur d'erreur local Θ_T associé à T .
4. Si l'estimation d'erreur globale est inférieure à un seuil de tolérance, on arrête les calculs.
5. Sinon, sur la base de ces indicateurs d'erreur locaux, on décide de raffiner certaines mailles et d'en déraffiner d'autres. On note \mathcal{T}_h^{i+1} le nouveau maillage ainsi construit.
6. On incrémente l'indice i de 1 et on revient à l'étape (2).

Plusieurs stratégies sont possibles à l'étape (5) lorsque le nouveau maillage est construit à partir des indicateurs d'erreur locaux. Une stratégie fréquemment utilisée dans les applications consiste à équirépartir l'erreur sur les mailles. Une maille $T \in \mathcal{T}_h^i$ sera raffinée, si l'indicateur d'erreur local Θ_T est supérieur à la moyenne $\bar{\Theta}$ des indicateurs d'erreur locaux sur le maillage \mathcal{T}_h^i . On peut raffiner, dans le cas bidimensionnel, un élément suivant trois possibilités :

- ★ soit cet élément sera coupé en deux, si l'angle minimal à respecter le permet,
- ★ soit il sera coupé en trois, si l'angle minimal à respecter le permet,
- ★ soit il sera coupé en quatre triangles.

Pour chaque triangle divisé, il faut alors marquer ses voisins afin qu'ils soient eux-même coupés suivant les mêmes critères, afin que le maillage reste conforme. Le principe d'un algorithme d'adaptation de maillage est illustré par la Figure 1.3.

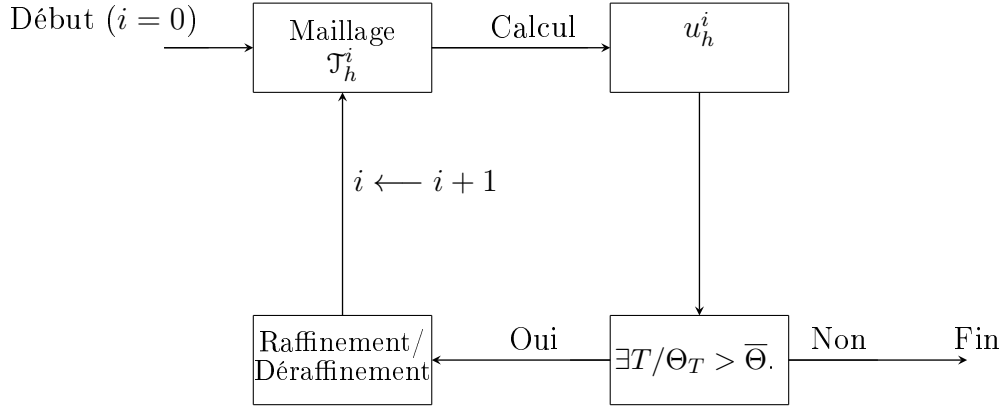


FIGURE 1.3 – Schéma d’une boucle d’adaptation de maillage.

• **Propriété d’efficacité.** Pour qu’une procédure de raffinement adaptatif de maillage soit efficace, il faut que les indicateurs d’erreur locaux obéissent à l’estimation,

$$\Theta_T(h_T, D, u_h) \lesssim \left(\sum_{T' \in \Delta_T} e_{T'}(u_h)^2 \right)^{1/2} + \zeta_T, \quad (1.10)$$

où $e_T(u_h)$ est l’erreur locale sur T telle que,

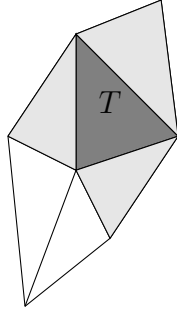
$$\|u - u_h\| = e(u_h) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (e_T(u_h))^2 \right)^{1/2}, \quad (1.11)$$

ζ_T est le terme d’approximation local tel que,

$$\zeta = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \zeta_T^2 \right)^{1/2}, \quad (1.12)$$

et Δ_T est un macro-élément (indique un ensemble d’éléments autour de T), par exemple, les éléments partageant un sommet ou une face avec T (voir Figure 1.4 ci-dessous). Dans la Figure 1.4, la maille T est en gris foncé ; l’ensemble des éléments partageant une arête avec T est constitué de T et des trois triangles en gris clair ; l’ensemble des éléments partageant au moins un sommet avec T est constitué du macro-élément précédent et des deux autres triangles en blanc.

L’estimation (1.10) s’interprète comme une propriété d’efficacité puisqu’elle garantit que localement sur le macro-élément Δ_T , l’indicateur d’erreur local $\Theta_T(h_T, D, u_h)$ ne

FIGURE 1.4 – Exemple de macro-éléments Δ_T centré sur la maille T en 2d.

"surévalue pas trop" l'erreur réelle.

Définition 1.1. (*critère d'optimalité*) Une famille d'indicateurs d'erreur locaux $(\Theta_T)_{T \in \mathcal{T}_h}$ est optimale si elle satisfait la propriété de fiabilité (1.7) et la propriété d'efficacité (1.10).

Remarque 1.2. Le critère d'optimalité assure l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur d'erreur a-posteriori. Ce critère permet donc d'assurer numériquement le bon comportement des indicateurs d'erreur a-posteriori.

Pour la méthode des éléments finis, les estimations d'erreur a-posteriori ont été développées depuis plus de trente ans. Elles ont été initiées par Babuška et Rheinboldt [16, 17] vers les années 78, et une vaste littérature existe sur ce sujet. On réfère, par exemple, aux livres de Verfürth [111] ou de Ainsworth et Oden [9].

Il existe dans la littérature, plusieurs classes d'estimations d'erreur a-posteriori. On peut citer notamment : les estimations d'erreur a-posteriori de type résiduel [16, 107, 109, 110, 111, 112], les estimations d'erreur a-posteriori de type hiérarchique [1, 10, 18, 19, 63], les estimations par résolution de problèmes locaux [16, 19, 28, 111, 112, 114], les estimations par résolution d'un problème dual [23, 24, 25, 39, 61, 62, 64, 79, 80, 82, 96, 103], les estimations de l'erreur de modélisation [32].

Nous donnons dans la sous-section 1.3.2 suivante, une brève description des estimations d'erreur a-posteriori de type résiduel. En effet, les estimations d'erreur a-posteriori que nous développons dans cette thèse sont de type résiduel.

1.3.2 Les estimations d'erreur a-posteriori de type résiduel

Pour des raisons de clarté, plaçons-nous dans le cadre du problème de Poisson, avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes : étant donnée $f \in L^2(\Omega)$, trouver

$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant le système,

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (1.13)$$

Ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivante : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que,

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.14)$$

La forme bilinéaire $a(., .)$ est définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par $a(u, v) := (\nabla u, \nabla v)_\Omega$, tandis que la forme linéaire $L(\cdot)$ est définie sur $H_0^1(\Omega)$ par $L(v) := (f, v)_\Omega$.

Par le lemme de Lax-Milgram, il est clair que le problème (1.14) admet une solution et une seule dans $H_0^1(\Omega)$.

Le problème discret associé dans un cadre conforme, est de trouver u_h dans un espace d'éléments finis (P^1 -conforme par exemple) $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$ tel que,

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^0. \quad (1.15)$$

L'approximation étant conforme, le problème (1.15) admet aussi une solution et une seule d'après le lemme de Lax-Milgram. Selon l'ellipticité de a , on a une première majoration sur l'erreur :

$$\| u - u_h \|_{1,\Omega} \lesssim \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{a(u - u_h, v)}{\| v \|_{1,\Omega}}. \quad (1.16)$$

D'après le principe énoncé dans la section (1.3.1), nous allons chercher maintenant à éliminer l'inconnue u dans la borne supérieure de (1.16). On a la relation suivante, appelée relation d'orthogonalité de Galerkin :

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h^0. \quad (1.17)$$

On a l'égalité suivante :

$$a(u - u_h, v) = a(u - u_h, v - v_h), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall v_h \in V_h^0. \quad (1.18)$$

De l'égalité (1.18) et de la formulation (1.14), on a successivement les égalités :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= (\nabla(u - u_h), \nabla(v - v_h))_\Omega \\ &= (\nabla u, \nabla(v - v_h))_\Omega - (\nabla u_h, \nabla(v - v_h))_\Omega \\ &= (f, v - v_h)_\Omega - (\nabla u_h, \nabla(v - v_h))_\Omega. \end{aligned} \quad (1.19)$$

A cette étape, une première idée importante est à retenir : l'élimination de la solution exacte u dans (1.19).

Maintenant, on fait une décomposition sur les éléments de la triangulation \mathcal{T}_h :

$$a(u - u_h, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{(f, v - v_h)_T - (\nabla u_h, \nabla(v - v_h))_T\}. \quad (1.20)$$

On applique ensuite une formule de Green à $(\nabla u_h, \nabla(v - v_h))_T$, pour obtenir :

$$a(u - u_h, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{(f + \Delta u_h, v - v_h)_T - (\nabla u_h \cdot n_T, v - v_h)_{\partial T}\}. \quad (1.21)$$

A cette étape, une seconde idée importante est à retenir : l'application de la formule de Green à $(\nabla u_h, \nabla(v - v_h))_T$ dans l'équation (1.20) pour éliminer l'opérateur "nabla" agissant sur $v - v_h$.

L'égalité (1.21) conduise à :

$$a(u - u_h, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ (f + \Delta u_h, v - v_h)_T - \frac{1}{2} \times \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} ([\nabla u_h \cdot n_E]_E, v - v_h)_E \right\} \quad (1.22)$$

On introduit dans (1.22) une approximation f_h de f dans le sens de la norme L^2 :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ (f - f_h, v - v_h)_T + (f_h + \Delta u_h, v - v_h)_T \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \times \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} ([\nabla u_h \cdot n_E]_E, v - v_h)_E \right\}. \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire et celle de Cauchy-Schwarz appliquées à la dernière équation conduisent à :

$$a(u - u_h, v) \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ (\|f - f_h\|_T + \|f_h + \Delta u_h\|_T) \times \|v - v_h\|_T + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \times \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} \left\| [\nabla u_h \cdot n_E]_E \right\|_E \times \left\| v - v_h \right\|_E \right\|_T \Big\}.$$

A cette dernière étape, on utilise un opérateur d'interpolation qui est un outil très primordial dans l'analyse d'erreur a-posteriori. Cet outil sera présenté dans le chapitre 2 dans le cadre du problème couplé Stokes-Darcy. On exploite l'estimation (1.16) pour avoir,

$$\left\| u - u_h \right\|_{1,\Omega} \lesssim \underbrace{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Theta_T^2 \right)^{1/2}}_{\text{estimateur } \Theta} + \underbrace{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| f - f_h \right\|_T^2 \right)^{1/2}}_{\text{terme d'approximation } \zeta}, \quad (1.23)$$

où les indicateurs d'erreur locaux sont définis par,

$$\Theta_T := \left(h_T^2 \left\| f_h + \Delta u_h \right\|_T^2 + \frac{1}{2} \times \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} \text{diam}(E) \left\| [\nabla u_h \cdot n_E]_E \right\|_E^2 \right)^{1/2}. \quad (1.24)$$

Dans la littérature, la quantité Θ_T définie en (1.24) est appelée indicateur d'erreur a-posteriori de type résiduel car $f_h + \Delta u_h$ est le résidu de l'équation $-\Delta u = f$. En utilisant une panoplie d'outils qui seront présentés dans le chapitre 2, on garantit également la propriété d'efficacité (1.10) énoncée dans la section 1.3.1.

Cette technique d'estimation d'erreur a-posteriori a été initiée par Babuška et Rheinboldt dans [16] et détaillée par Verfürth dans [111]. Cette technique est probablement la plus populaire car elle est peu coûteuse. Les bornes supérieures sont en générales des bornes calculables multipliées par une constante indépendante de la solution exacte et du pas du maillage mais dont la valeur est difficile à calculer explicitement.

Les estimateurs d'erreur a-posteriori de type résiduel sont utilisées dans de nombreux domaines d'application. Par exemples, pour les équations de Stokes, Verfürth dans [107, 109] obtient un estimateur par résidu fiable et efficace. Babuška et al dans [14] s'intéressent aux calculs des constantes apparaissant dans la majoration et la minoration de l'erreur. Bernardi et Verfürth dans [30] établissent pour l'équation de Poisson à coefficients variables des opérateurs d'interpolation permettant d'obtenir des constantes dans les estimations d'erreur indépendantes du rapport entre le maximum du coefficient de diffusion et le minimum. Achdou et al. dans [2, 3] proposent deux estimateurs par résidu pour les équations de Darcy à perméabilité variable. Les

travaux de Carstensen dans [40] et ceux de Hoppe et Wohlmuth dans [74] analysent un estimateur par résidu pour une formulation mixte du problème de Poisson. Verfürth dans [110] étudie des estimateurs d'erreur a-posteriori pour des problèmes elliptiques non-linéaires. Pour les problèmes de convection-diffusion, Verfürth dans [112] présente un estimateur par résidu dit robuste. Pousin et Rappaz dans [95] obtiennent un estimateur par résidu pour les équations de convection-diffusion non-linéaires. Schieweck dans [100] propose un estimateur dans le cadre d'une méthode non-conforme pour la discrétisation du problème de Poisson. Ce type d'estimateur est également utilisé pour des discrétisations de type volumes finis. On pourra se référer à [4, 11] pour des problèmes elliptiques linéaires et à [26, 27] pour des problèmes non-linéaires.

1.4 Objectifs de la thèse et résultats obtenus

1.4.1 Objectifs de la thèse

L'objectif de la thèse est de discrétiser et de faire une analyse d'erreur a-posteriori pour les équations du problème de transmission Stokes-Darcy, via quelques méthodes d'éléments finis mixtes. L'élaboration des estimateurs d'erreur a-posteriori repose sur des discrétisations isotrope et anisotrope.

En effet, il existe beaucoup de résultats d'analyse d'erreur a-posteriori pour la formulation mixte du problème de Darcy [34, 41, 88] et pour le problème de Stokes [8, 20, 42, 55, 59, 70, 92, 108, 115, 116]. Cependant, plusieurs méthodes d'éléments finis mixtes sont proposées dans les papiers [15, 46, 54, 65, 66, 117] pour résoudre le problème approché associé au problème couplé Stokes-Darcy. Ces méthodes sont parfois conformes, parfois non-conformes et il existe très peu de résultats d'analyse d'erreur a-posteriori [15, 46, 54, 65]. Dans ces papiers [15, 46, 54, 65], les auteurs ne considèrent que des discrétisations isotropes. La méthode d'éléments finis qu'ils utilisent est conforme et les estimateurs d'erreur sont de type résiduel.

Ainsi, les objectifs principaux de la thèse sont :

1. *Proposer des indicateurs d'erreur a-posteriori de type résiduel via quelques méthodes d'éléments finis mixtes pour le problème de transmission Stokes-Darcy : discrétisation isotrope. Ensuite, faire une analyse de l'erreur a-posteriori en fonction de ces indicateurs.*
2. *Faire une extension de ces résultats à une discrétisation anisotrope. En effet ;*

lors de la résolution d'une équation aux dérivées partielles, dans certaines situations, la solution possède un comportement radicalement différent selon la direction d'espace considérée. Par exemple, une couche limite qui se développe à proximité d'une paroi en mécanique des fluides visqueux : la composante de la vitesse dans la direction de la paroi possède un très fort gradient perpendiculairement à la paroi, mais un très faible gradient parallèlement à celle-ci (voir par exemple les travaux de **Marco Discacciati, Paola Gervasio et Alfio Quarteroni** dans [57, Section 7] ou de **Marco Discacciati et Alfio Quarteroni** dans [58, Pages 322-327] pour le cas du problème couplé Stokes-Darcy). Dans le cadre de tels problèmes, les méthodes isotropes de discrétisation peuvent devenir inappropriées, puisqu'elles nécessitent un nombre très important d'éléments dans les régions où la solution est anisotrope. D'où un sur-raffinement dans la direction pour laquelle la solution n'évolue pas beaucoup, comme le long de la couche limite (pour reprendre l'exemple précédent). Pour éviter cet inconvénient, l'idée est d'autoriser la discrétisation à rendre compte de l'anisotropie de la solution en admettant que certaines mailles puissent violer la contrainte de l'angle minimum. On entre alors dans la classe des discrétisations anisotropes. L'utilisation de telle discrétisation permet d'atteindre la même précision de calcul qu'avec une discrétisation isotrope, mais avec beaucoup moins de degré de liberté. Voir par exemple les travaux [44, 84, 90] pour l'application au calcul d'écoulements, ainsi que [31] pour des exemples de mailleurs anisotropes.

3. Enfin, mettre en œuvre à l'aide de ces indicateurs d'erreur un algorithme de raffinement adaptatif de maillage.

1.4.2 Résultats obtenus

1. Nous avons discrétisé les équations du problème de transmission Stokes-Darcy, via une variante de la méthode d'éléments finis non-conforme de Crouzeix-Raviart, sur une discrétisation isotrope. Le problème discret associé est stable et la famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori obtenue est optimale [7];
2. Nous avons considéré une extension des résultats obtenus au point (1) à une discrétisation anisotrope. Nous avons utilisé une généralisation de l'inégalité de Korn discrète [35] pour démontrer la stabilité du problème discret associé [6]. La famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori obtenue est efficace [5];

3. *Nous avons développé une analyse d'erreur a-posteriori de type résiduel, en admettant une discrétisation anisotrope. La méthode d'approximation est conforme pour les deux inconnues. La famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori obtenue est optimale sous certaines hypothèses théoriques faites sur les mailles et sur les espaces d'approximations [5]. Dans le cas spécifique où la discrétisation est isotrope, nous obtenons une nouvelle famille optimale d'indicateurs d'erreur a-posteriori [5].*
4. *Afin de faciliter le processus d'obtention des indicateurs d'erreur a-posteriori, nous avons établi quelques résultats techniques [7] : nous avons établi un résultat de décomposition de Helmholtz spéciale des éléments de l'espace vitesse considéré ; nous avons établi un résultat de régularité de la vitesse du fluide dans Ω_d ; puis, nous avons construit un opérateur d'interpolation de Oswald adapté qui préserve la continuité de la vitesse du fluide à travers l'interface.*

1.5 Plan de la thèse

Le reste de ce document est composé de six chapitres. Ils sont répartis comme suit :

- • **Chapitre 2.** Dans le chapitre 2, nous rassemblons les notions et les résultats que nous utilisons fréquemment tout au long de ce manuscrit. Dans la section 2.2, nous donnons de brèves définitions de quelques espaces fonctionnels, notamment, les espaces de Sobolev et quelques espaces particuliers. En effet, c'est dans ces espaces qu'on recherche la solution variationnelle et qu'on donne les résultats de régularité. Dans la section 2.3, nous rappelons la définition des différentes triangulations utilisées : les triangulations conforme, isotrope et anisotrope. Nous donnons de brèves descriptions des éléments finis de Crouzeix-Raviart et de Nédélec dans la section 2.4. Nous regroupons dans la section 2.5, les outils d'analyse, c'est-à-dire, les opérateurs d'interpolation de Clément, les fonctions bulles, les opérateurs d'extensions, les inégalités inverses et de trace, les formules de Green. Nous rappelons l'inégalité de Korn classique dans la section 2.6. Cette inégalité de Korn permet de montrer l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle. Enfin, nous présentons dans la section 2.7, une formulation faible associée au problème couplé Stokes-Darcy. Cette formulation faible est sans mutiplicateurs

de Lagrange sur l'interface. L'avantage d'utiliser une telle formulation est que, nous pouvons approcher la vitesse du fluide dans chaque sous-domaine en employant les mêmes éléments finis (on parle de la méthode d'éléments finis unifiée). Ce qui facilitera donc l'implémentation au cours des tests numériques.

- • **Chapitre 3.** Dans ce chapitre, nous effectuons une analyse d'erreur a-posteriori de type résiduel sur une discrétisation isotrope. Nous approchons la vitesse du fluide dans Ω en utilisant une variante de la méthode d'éléments finis $[\mathbb{P}^1]^N$ non-conformes de Crouzeix-Raviart. La pression du fluide dans Ω est approchée dans l'espace des fonctions constantes par morceaux. Nous étudions l'inégalité de Korn discrète sur une discrétisation isotrope dans la sous-section 3.2.2. Nous utilisons cette inégalité pour justifier la stabilité du problème discret dans la sous-section 3.2.3. Un résultat d'estimation d'erreur a-priori optimal est présenté dans la sous-section 3.3. Les résultats techniques que nous établissons sont dans la section 3.4, lesquels facilitent le processus d'obtention de nos indicateurs d'erreur a-posteriori. Nous établissons dans la sous-section 3.4.1, un résultat de décomposition de Helmholtz spécial des éléments de l'espace vitesse considéré [7]. En effet, la vitesse du fluide dans Ω_d est seulement $H(\mathbf{div})$ et l'opérateur d'interpolation de Clément est défini pour les fonctions appartenant à l'espace de Sobolev $[H^1(\Omega_d)]^N$. Dans la sous-section 3.4.2, nous établissons un résultat de régularité de la vitesse du fluide dans Ω_d [7]. La raison est que, nous avons utilisé dans les estimations d'erreur a posteriori, la trace de la vitesse du fluide dans Ω_d (la vitesse du fluide dans Ω_d étant seulement $H(\mathbf{div})$). Dans la sous-section 3.4.3, nous construisons un opérateur d'interpolation de Oswald adapté qui préserve la continuité de la vitesse du fluide à travers l'interface [7]. Nous construisons ainsi une famille optimale d'indicateurs d'erreur a-posteriori, laquelle constitue le résultat principal de ce chapitre [7]. Ces indicateurs d'erreur sont de type résiduel et ils sont définis dans la sous-section 3.5.1. En outre, nous démontrons la fiabilité des indicateurs dans la sous-section 3.5.2 tandis que la propriété d'efficacité est démontrée dans la sous-section 3.5.3.
- • **Chapitre 4.** Le but de ce chapitre est d'étendre les résultats obtenus dans le chapitre 3 à une discrétisation anisotrope. L'objectif est donc de généraliser les estimateurs d'erreur a-posteriori de type résiduel obtenus dans le chapitre 3 au cas des maillages anisotropes, aussi bien en $2d$ qu'en $3d$. Nous utilisons les mêmes éléments finis mixtes. Nous généralisons l'inégalité de Korn discrète standard

de la sous-section 3.2.2 à une discrétisation anisotrope (cf. sous-section 4.2.2). Nous faisons cette extension sur l'espace des fonctions affines par morceaux. Nous démontrons ainsi la stabilité du problème approché [6] via le théorème de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (cf. sous-section 4.2.3). Nous proposons ensuite une famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori, avec lesquels nous effectuons une analyse d'erreur a-posteriori. Ces indicateurs d'erreur sont définis dans la sous-section 4.4.1. Une majoration globale de l'erreur sur la pression est prouvée dans la sous-section 4.4.2. Nous démontrons l'efficacité de ces indicateurs d'erreur [5] dans la sous-section 4.4.3, laquelle ne dépend pas du caractère anisotrope du maillage.

- • **Chapitre 5.** Ce chapitre est consacré à l'analyse d'erreur a-posteriori du type résiduel sur une discrétisation anisotrope. La méthode d'éléments finis utilisée est conforme pour toutes les inconnues. L'objectif est de généraliser les estimateurs d'erreur a-posteriori de type résiduel obtenus dans les papiers [15, 46, 54, 65] pour les méthodes d'approximation conformes, en admettant une discrétisation anisotrope. Un point de départ a été le travail de [52]. Sous certaines hypothèses théoriques faites sur les mailles et sur les espaces d'approximations, nous effectuons une analyse d'erreur a-posteriori pour le problème couplé Stokes-Darcy, en admettant un maillage anisotrope [5]. Les indicateurs d'erreur a-posteriori obtenus sont de type résiduel. Ces indicateurs d'erreur sont définis dans la sous-section 5.3.1. La majoration globale de la norme de l'erreur et la minoration locale de la semi-norme de l'erreur forment les résultats principaux de ce chapitre. En outre, en s'inspirant de la technique développée dans [52], nous démontrons que cette famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori est fiable dans la sous-section 5.3.2. La propriété d'efficacité est démontrée dans la sous-section 5.3.3. Nous constatons que la majoration globale de la norme de l'erreur dépend d'un alignement approprié du maillage anisotrope avec une solution anisotrope donnée. La minoration locale de la semi-norme de l'erreur est obtenue indépendamment du caractère anisotrope du maillage. Enfin, dans la sous-section 5.3.4, nous considérons une restriction des résultats obtenus à une discrétisation isotrope. Dans ce cas, la mesure d'alignement est équivalente à l'unité. Les résultats sont alors simplifiés et la majoration globale de la norme de l'erreur tient sans condition. Ce cas particulier donne des indicateurs d'erreur nouveaux [5], parcequ'ils sont différents de ceux proposés dans les papiers [15, 46, 54, 65] pour les maillages conformes et isotropes.

- • **Chapitre 6.** Nous effectuons dans ce chapitre, quelques tests numériques sur les éléments finis de Crouzeix-Raviart non-conformes. Nous étudions premièrement la convergence de la vitesse et de la pression du fluide dans chaque sous domaine (cf. section 6.2 et section 6.3). Nous représentons ensuite les courbes d'isovaleures (cf. section 6.4). Dans la section 6.5, nous étudions la structure de la matrice de rigidité. Nous terminons ce chapitre par la section 6.6 dans laquelle nous représentons les solutions exactes et les seconds membres.
- • **Chapitre 7.** Le chapitre 7 dresse la conclusion de ce travail de thèse et propose quelques perspectives.
- • **Publications.** Les résultats présentés dans le chapitre 3 ont donné lieu à une publication [7]. Les résultats présentés dans les chapitres 4 et 5 ont donné lieu à des préprints [5, 6].

Préliminaires

Sommaire

2.1	Introduction	35
2.2	Quelques espaces fonctionnels	36
2.3	Discrétisations	41
2.4	Propriétés de quelques éléments finis	51
2.5	Outils d'analyse	55
2.6	Inégalité de Korn classique	63
2.7	Formulation faible associée au problème couplé Stokes-Darcy	65
2.8	Conclusion	70

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rassemblons les notions de base, et les résultats que nous utilisons fréquemment tout au long de ce travail. Dans la section 2.2, nous donnons de brèves définitions de quelques espaces fonctionnels, notamment les espaces de Sobolev et quelques espaces particuliers. C'est dans ces espaces que l'on recherche la solution variationnelle et que l'on donne les résultats de régularité. Dans la section 2.3, nous rappelons la définition des différentes triangulations utilisées : les triangulations conforme, isotrope et anisotrope. Nous donnons de brèves descriptions des éléments finis de Crouzeix-Raviart et de Nédélec dans la section 2.4. Nous regroupons dans la section 2.5, les outils d'analyse, c'est-à-dire, les opérateurs d'interpolation de Clément, les fonctions bulles, opérateurs d'extension, inégalités inverses et de trace, les formules de Green. Nous rappelons l'inégalité de Korn classique dans la section 2.6. Cette inégalité de Korn permet de montrer l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle. Enfin,

nous présentons dans la section 2.7 une formulation faible associée au problème couplé Stokes-Darcy.

2.2 Quelques espaces fonctionnels

2.2.1 Les espaces de Sobolev classiques

Nous nous limitons ici à quelques définitions et résultats relatifs aux espaces de Sobolev que nous allons souvent utiliser.

Dans toute cette sous-section, s désigne un réel et p désigne un nombre réel strictement supérieur à 1. On désigne par m la partie entière de s et on pose $s = \sigma + m$, avec $\sigma \in [0, 1[$.

Définition 2.1. ([69, Pages 28-29]) Pour $s > 0$, $W^{s,p}(K)$ est l'espace des distributions $v \in \mathcal{D}'(K)$ telles que,

1. $D^\alpha v \in L^p(K)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leq m$, si $s = m$ entier;
2. $v \in W^{m,p}(K)$ et $\iint_{K \times K} \frac{|D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)|^p}{|x - y|^{\sigma p + N}} dx dy < \infty$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| = m$, s non entier.

$W^{s,p}(K)$ est un espace de Banach pour la norme définie par,

$$\|v\|_{W^{s,p}(K)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_K |D^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad (2.1)$$

dans le cas 1. et par,

$$\|v\|_{W^{s,p}(K)} := \left(\|v\|_{W^{m,p}(K)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \iint_{K \times K} \frac{|D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)|^p}{|x - y|^{\sigma p + N}} dx dy \right)^{1/p}, \quad (2.2)$$

dans la cas 2.

En particulier, l'espace de Sobolev $H^m(K) = W^{m,2}(K)$ est défini comme suit,

$$H^m(K) := \{v \in L^2(K); \partial^\alpha v \in L^2(K), |\alpha| \leq m\}. \quad (2.3)$$

L'espace $H^m(K)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$(v, w)_{m,K} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_K \partial^\alpha v \partial^\alpha w, \forall v, w \in H^m(K). \quad (2.4)$$

- La norme associée est définie par,

$$\|v\|_{m,K} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}, \forall v \in H^m(K). \quad (2.5)$$

- On considère également la semi-norme :

$$|v|_{m,K} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}, \forall v \in H^m(K). \quad (2.6)$$

- Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in [H^m(K)]^N$ est une fonction vectorielle, alors :

$$\|\mathbf{v}\|_{m,K} := \left(\sum_{i=1}^N \|v_i\|_{m,K}^2 \right)^{1/2} \text{ et } |\mathbf{v}|_{m,K} := \left(\sum_{i=1}^N |v_i|_{m,K}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

- Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} \in [H^m(K)]^{N \times N}$ est une fonction matricielle, alors :

$$\|A\|_{m,K} := \left(\sum_{i,j=1}^N \|a_{ij}\|_{m,K}^2 \right)^{1/2} \text{ et } |A|_{m,K} := \left(\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|_{m,K}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.8)$$

- Dans le cas particulier où $m = 0$, on a $H^0(K) = L^2(K)$ et la norme $\|\cdot\|_{0,K}$ sera simplement notée $\|\cdot\|_K$. Si $K = \Omega$, la norme $\|\cdot\|_\Omega$ sera notée $\|\cdot\|$.

Définition 2.2. Pour $s > 0$ et $p > 1$, on désigne par $W_0^{s,p}(K)$ la fermeture de $\mathcal{D}(K)$ dans $W^{s,p}(K)$. En particulier, $H_0^m(K)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(K)$ dans $H^m(K)$.

Définition 2.3. ([69, Page 18]) Pour $s > 0$, $p > 1$, on désigne par $\tilde{W}^{s,p}(K)$ l'espace des $u \in W^{s,p}(K)$ dont le prolongement \tilde{u} par zero en dehors de K appartient à $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, où l'espace de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ est défini dans [69, Pages 14-15].

Trace. On définit l'application,

$$\gamma_0 : u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{K}) \mapsto \gamma_0(u) := u|_{\partial K} \in L^2(\partial K).$$

L'application γ_0 se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace $H^1(K)$. On appelle l'opérateur γ_0 , l'application trace.

L'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\partial K)$. L'image $\gamma_0(H^1(K))$ est notée $H^{\frac{1}{2}}(\partial K)$.

On étend ainsi l'application γ_0 à,

$$\gamma_0 : u \in H^1(K) \longmapsto \gamma_0(u) := u|_{\partial K} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial K),$$

de sorte que :

1. l'application γ_0 est surjective ;
2. le noyau de γ_0 est l'espace $H_0^1(K)$.

On définit alors,

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial K) := \{g \in L^2(\partial K), \text{ tel que } \exists v \in H^1(K), \gamma_0(v) = g \text{ sur } \partial K\}, \quad (2.9)$$

muni de la norme,

$$\|g\|_{1/2, \partial K} := \inf_{\substack{v \in H^1(K) \\ \gamma_0(v)=g.}} \|v\|_{1,K}. \quad (2.10)$$

Théorème 2.4. (cf. [69]) *L'espace $H^{\frac{1}{2}}(\partial K) = \gamma_0(H^1(K))$ est dense dans $L^2(\partial K)$ et il existe un opérateur linéaire continu $R_0 : H^{\frac{1}{2}}(\partial K) \longrightarrow H^1(K)$, dit de relèvement, qui vérifie,*

$$\gamma_0 \circ R_0 = Id_{\partial K}. \quad (2.11)$$

Espace d'interpolation. Soit $\Gamma_K \subset \partial K$ un sous-ensemble mesurable tel que $\text{mes}_{N-1} \Gamma_K \neq 0$. On définit l'espace $H_{00}^{1/2}(\Gamma_K)$ comme suit,

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma_K) = \{g \in L^2(\Gamma_K), \text{ tel que } \exists v \in H^1(K), \gamma_0(v) = g \text{ sur } \Gamma_K \text{ et } \gamma_0(v) = 0 \text{ sur } \partial K \setminus \Gamma_K\}.$$

L'espace $H_{00}^{1/2}(\Gamma_K)$ est l'espace d'interpolation $[L^2(\Gamma_K), H_0^1(\Gamma_K)]_{1/2}$. On définit ensuite l'espace $H^{-1/2}(\Gamma_K)$ par :

$$H^{-1/2}(\Gamma_K) = [H_{00}^{1/2}(\Gamma_K)]'.$$

On pourra se référer à J. L. Lions et E. Magenes dans [87] pour plus d'information sur cet espace.

2.2.2 Recollement d'espaces de Sobolev

Dans la suite, on aura besoin du résultat de recollement suivant :

Théorème 2.5. ([89]) Soient K_1 et K_2 deux sous-ouverts à bord lipschitzien de K tels que :

$$\begin{aligned}\overline{K_1} \cup \overline{K_2} &= \overline{K}, \\ K_1 \cap K_2 &= \emptyset.\end{aligned}$$

Notons $I = \partial K_1 \cap \partial K_2$. Soient $u_1 \in H^1(K_1)$ et $u_2 \in H^1(K_2)$ satisfaisant la condition :

$$\gamma_0 u_1 = \gamma_0 u_2 \text{ sur } I. \quad (2.12)$$

Alors la fonction u définie par :

$$u := \begin{cases} u_1 & \text{dans } K_1, \\ u_2 & \text{dans } K_2, \end{cases} \quad (2.13)$$

appartient à $H^1(K)$.

2.2.3 Espaces particuliers

1. L'espace $H(\mathbf{rot}, K)$.

- Quand $N = 2$, nous définissons l'opérateur rotationnel \mathbf{rot} d'une fonction scalaire $\phi \in \mathcal{D}'(K)$ et d'une fonction vectorielle $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in [\mathcal{D}'(K)]^2$ respectivement par :

$$\mathbf{rot}\phi := \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{v} := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (2.15)$$

- Quand $N = 3$, nous définissons l'opérateur rotationnel \mathbf{rot} d'une fonction vectorielle $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{D}'(K)]^3$ par :

$$\mathbf{rot}\mathbf{v} := \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right). \quad (2.16)$$

- On peut facilement vérifier que les identités suivantes tiennent [67, Page 31] :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\phi) = -\Delta\phi, \forall \phi \in \mathcal{D}'(K), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{v}) = -\Delta\mathbf{v} + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in [\mathcal{D}'(K)]^2, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{v}) = -\Delta\mathbf{v} + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in [\mathcal{D}'(K)]^3. \quad (2.19)$$

- Nous définissons les espaces suivants :

$$H(\mathbf{rot}, K) := \{ \phi \in L^2(K) : \mathbf{rot}\phi \in [L^2(K)]^2 \} \text{ (pour les fonctions scalaire) }.$$

$$H(\mathbf{rot}, K) := \begin{cases} \{ \mathbf{v} \in [L^2(K)]^2 : \mathbf{rot}\mathbf{v} \in L^2(K) \} & \text{si } N = 2, \\ \{ \mathbf{v} \in [L^2(K)]^3 : \mathbf{rot}\mathbf{v} \in [L^2(K)]^3 \} & \text{si } N = 3. \end{cases}$$

- L'espace $H(\mathbf{rot}, K)$ est un espace de Hilbert pour la norme [67, Page 32] :

$$\| \psi \|_{\mathbf{rot}, K} := \left(\| \psi \|_K^2 + \| \mathbf{rot}\psi \|_K^2 \right)^{1/2}. \quad (2.20)$$

- On introduit ensuite l'espace $H_0(\mathbf{rot}, K)$, qui est défini par :

$$H_0(\mathbf{rot}, K) := \{ \psi \in H(\mathbf{rot}, K) : \gamma_\tau \psi = \mathbf{0} \text{ sur } \partial K \}, \quad (2.21)$$

où $\gamma_\tau \psi$ est la composante tangentielle (resp. les composantes tangentielles) de ψ pour $N = 2$ (resp. pour $N = 3$). La fonction $\gamma_\tau \psi$ est définie par :

$$\gamma_\tau \psi := \begin{cases} \psi \cdot \tau_{|\partial K} & \text{si } N = 2, \\ \psi \times \mathbf{n}_{|\partial K} & \text{si } N = 3, \end{cases} \quad (\tau \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial K).$$

Théorème 2.6. ([67, Page 33]) *L'ensemble de toutes les fonctions de $H(\mathbf{rot}, K)$ avec support compact contenu dans K est dense dans $H(\mathbf{rot}, K)$.*

2. **L'espace $H(\mathbf{div}, K)$.** Nous introduisons un espace intermédiaire entre $[L^2(K)]^N$ et $[H^1(K)]^N$. Cet espace est noté $H(\mathbf{div}, K)$ et est défini par :

$$H(\mathbf{div}, K) := \{ \psi \in [L^2(K)]^N : \operatorname{div} \psi \in L^2(K) \}. \quad (2.22)$$

On a les inclusions :

$$[H^1(K)]^N \subsetneq H(\mathbf{div}, K) \subsetneq [L^2(K)]^N. \quad (2.23)$$

- L'espace $H(\mathbf{div}, K)$ est aussi un espace de Hilbert pour la norme [67, Page 26] :

$$\| \psi \|_{\mathbf{div}, K} := \left(\| \psi \|_K^2 + \| \operatorname{div} \psi \|_K^2 \right)^{1/2}. \quad (2.24)$$

Définition 2.7. ([67, Page 26]) On désigne par $H_0(\mathbf{div}, K)$, la fermeture de $[\mathcal{D}(K)]^N$ dans $H(\mathbf{div}, K)$.

$$H_0(\mathbf{div}, K) := \{ \psi \in H(\mathbf{div}, K) : \psi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial K \}. \quad (2.25)$$

Théorème 2.8. ([67, Page 27]) L'espace $[\mathcal{D}(\bar{K})]^N$ est dense dans $H(\mathbf{div}, K)$.

2.3 Discrétisations

Définition 2.9. (Triangulation) On suppose que le bord ∂K est polygonal (si $N = 2$) ou polyédral (si $N = 3$). Une triangulation (ou maillage) \mathcal{T}_h sur \bar{K} est une partition finie de \bar{K} formée des éléments de formes simples, par exemple des triangles (si $N = 2$) ou des tétraèdres (si $N = 3$).

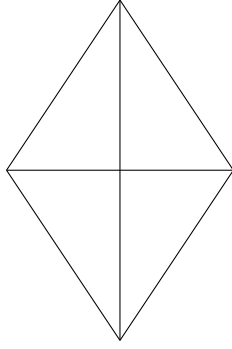
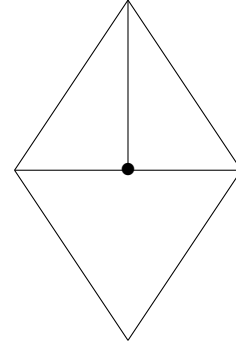
Pour $T \in \mathcal{T}_h$, on note h_T le diamètre de T et ρ_T le diamètre du cercle inscrit ($N = 2$) ou de la sphère inscrite ($N = 3$) dans T .

Signalons que dans cette thèse, les éléments du maillage sont soit des triangles (si $N = 2$), soit des tétraèdre (si $N = 3$).

2.3.1 Triangulation conforme

Définition 2.10. (Triangulation conforme) On suppose que le bord ∂K est polygonal (si $N = 2$) ou polyédral (si $N = 3$). On dit qu'une triangulation \mathcal{T}_h sur \bar{K} est admissible ou conforme [48, Chapitre 2], si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit un sommet, soit un côté entier ou une face entière.

Les Figures 2.1 et 2.2 ci-dessous, sont respectivement des exemples de maillages conforme et non-conforme en dimension deux.

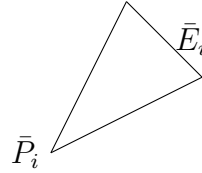
FIGURE 2.1 – Exemple d’une triangulation conforme en $2d$.FIGURE 2.2 – Exemple d’une triangulation non-conforme en $2d$.

2.3.2 Élément de référence, transformation affine et sous-domaines auxiliaires

1. **Elément de référence :** Nous désignons par \bar{T} , l’élément de référence. On note $\bar{P}_0 = (0, \dots, 0)$ et $\bar{P}_i = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$ les sommets de \bar{T} . Les arêtes ou faces \bar{E}_i de \bar{T} sont définies par :

$$\bar{E}_i := \bar{T} \cap \{\bar{x}_i = 0\}, i = 1, \dots, N \text{ et } \bar{E}_0 := \bar{T} \cap \{\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_N = 1\}.$$

\bar{E}_i est opposée au sommet \bar{P}_i (voir Figure 2.3 ci-dessous).

FIGURE 2.3 – Sommet \bar{P}_i et l’arête \bar{E}_i correspondante.

2. **Transformation affine :** Soit \mathcal{T}_h une triangulation sur \bar{K} . Pour une maille $T \in \mathcal{T}_h$, on note (cf. [63, Page 57]),

$$F_T : \bar{x} \in \bar{T} \mapsto x \in T \text{ par } x = F_T(\bar{x}), \quad (2.26)$$

la transformation géométrique correspondante (voir la Figure 2.4).

Définition 2.11.

(a) On dit que la transformation géométrique F_T est affine, s’il existe un vecteur

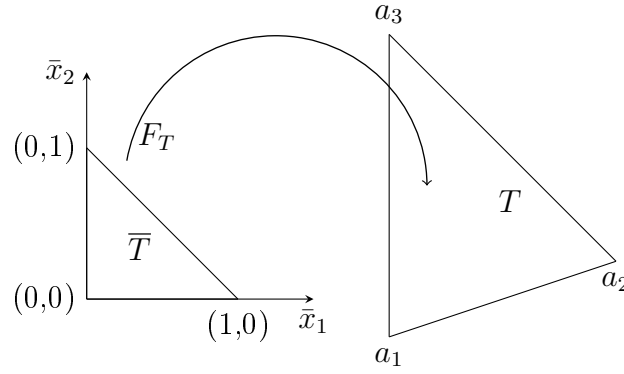


FIGURE 2.4 – Transformation géométrique F_T envoyant l'élément de référence \bar{T} sur un $T \in \mathcal{T}_h$ en $2d$.

(colonne) $\mathbf{m}_T \in \mathbb{R}^N$ et une matrice $\mathbb{J}_T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tels que,

$$F_T(\bar{x}) := \mathbf{m}_T + \mathbb{J}_T \cdot \bar{x} = x. \quad (2.27)$$

(b) Le maillage \mathcal{T}_h est affine, lorsque pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$, la transformation F_T est affine.

3. **Sous domaines auxiliaires :** Nous définissons maintenant deux sous domaines que nous utilisons dans les estimations. Soit \mathcal{T}_h une triangulation sur \bar{K} .

- Pour une maille $T \in \mathcal{T}_h$, nous désignons par W_T le domaine formé de T et de toutes les mailles adjacentes ayant des arêtes/faces commune avec T , c'est-à-dire,

$$W_T := \bigcup_{\partial T' \cap \partial T = E} T'. \quad (2.28)$$

- Soit $E \in \mathcal{E}_h(K)$ une face ou une arête de \mathcal{T}_h . Nous désignons par W_E , l'ensemble formé de toutes les mailles ayant E comme arête ou face, c'est-à-dire,

$$W_E := \begin{cases} T_1 \cup T_2 & \text{si } E = \partial T_1 \cap \partial T_2, \\ T & \text{si } E \subset \partial T \cap \partial K. \end{cases} \quad (2.29)$$

Les sous domaines auxiliaires W_E et W_T sont illustrés par les Figures 2.5, 2.6 et 2.7 ci-dessous.

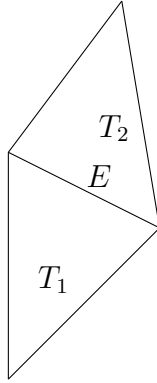


FIGURE 2.5 – Sous domaine auxiliaire W_E pour $E \in \mathcal{E}_h(K)$, $K \subset \mathbb{R}^2$.

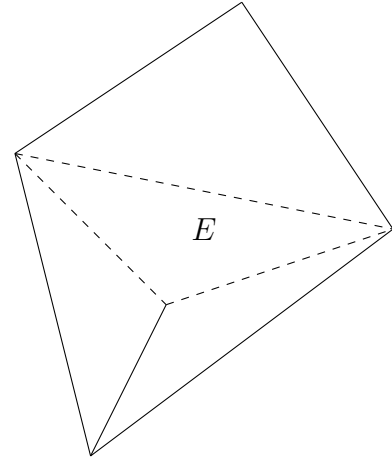


FIGURE 2.6 – Sous domaine auxiliaire W_E pour $E \in \mathcal{E}_h(K)$, $K \subset \mathbb{R}^3$.

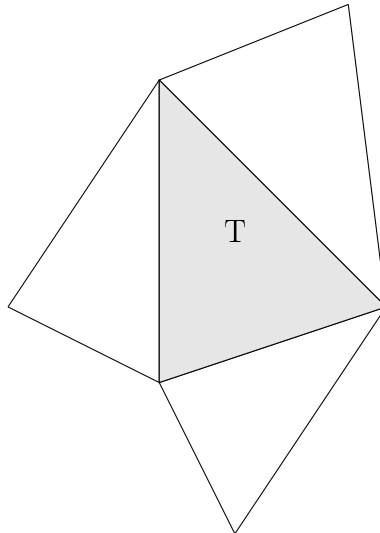


FIGURE 2.7 – Sous domaine auxiliaire W_T pour $T \subset \mathbb{R}^2$.

2.3.3 Discrétisation isotrope

On définit :

$$\sigma_T := \frac{h_T}{\rho_T} \text{ et } \sigma_h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} \sigma_T.$$

Définition 2.12. (*Triangulation isotrope*) On dira qu'une famille de triangulations $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ sur \overline{K} est régulière (ou isotrope), s'il existe une constante $\sigma_0 > 0$ indépendante de h telle que,

$$\sigma_h \leq \sigma_0, \forall h > 0. \quad (2.30)$$

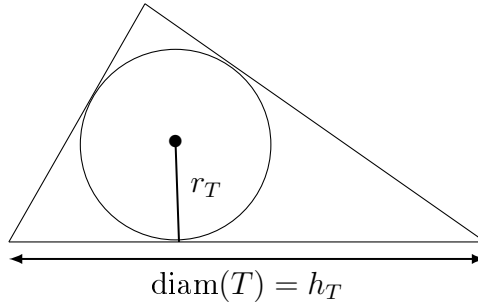


FIGURE 2.8 – Notation d'un élément isotrope T en 2d.

Notons que la condition (2.30) permet d'éviter les éléments trop aplatis (cf. par exemple la Figure 2.8, où $\rho_T = 2r_T$).

2.3.4 Discrétisation anisotrope

Définition 2.13. (*Triangulation anisotrope*) Une triangulation anisotrope est une triangulation dans laquelle les éléments sont allongés dans une ou plusieurs direction(s) privilégiée(s).

Contrairement au cas isotrope, la seule donnée du paramètre h ne suffit plus à caractériser le maillage. Nous introduisons ainsi quelques notations.

Notations d'un triangle et d'un tétraèdre

Notation 2.14. (*Notation d'un triangle*) Soit T un triangle. Les notations suivantes sont adoptées :

1. Les trois sommets de T sont notés par P_0, \dots, P_2 ;
2. $[P_0P_1]$ est le côté le plus long de T ;
3. $[P_0P_2]$ est le côté le plus court de T ;
4. De plus, nous définissons deux vecteurs :
 - (a) $\mathbf{p}_{1,T} := \overrightarrow{P_0P_1}$;
 - (b) Le vecteur $\mathbf{p}_{2,T}$ est dans le plan (P_0, P_1, P_2) , ayant P_2 comme extrémité et est orthogonal à $\mathbf{p}_{1,T}$.

Notation 2.15. (Notation d'un tétraèdre) Soit T un tétraèdre. Les notations suivantes sont adoptées :

1. Les quatre sommets de T sont notés par P_0, \dots, P_3 ;
2. $[P_0P_1]$ est le côté le plus long de T ;
3. Il existe deux triangles qui contiennent le côté $[P_0P_1]$. Le triangle ayant un domaine plus large est dénoté par $\triangle P_0P_1P_2$;
4. $[P_0P_2]$ est le côté le plus court du triangle $\triangle P_0P_1P_2$;
5. De plus, nous définissons trois vecteurs :
 - (a) $\mathbf{p}_{1,T} := \overrightarrow{P_0P_1}$;
 - (b) Le vecteur $\mathbf{p}_{2,T}$ est dans le plan (P_0, P_1, P_3) , ayant P_3 comme extrémité et est orthogonal à $\mathbf{p}_{1,T}$;
 - (c) $\mathbf{p}_{3,T}$ est un vecteur ayant le sommet P_2 comme extrémité et est normal au plan (P_0, P_1, P_3) .

Au regard de ces notations, les vecteurs $\mathbf{p}_{1,T}, \dots, \mathbf{p}_{N,T}$ sont donc mutuellement orthogonaux. Les Figures (2.9) et (2.10) visualisent ces notations.

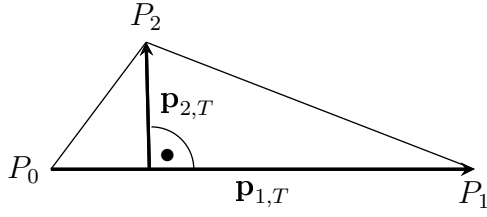


FIGURE 2.9 – Directions d'anisotropies pour le triangle.

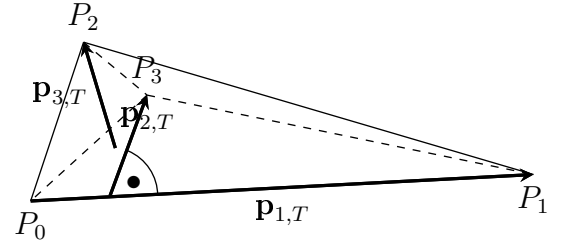


FIGURE 2.10 – Directions d'anisotropies pour le tétraèdre.

Remarque 2.16. Notons que dans cette thèse, tous les maillages sont supposés affines et les éléments anisotropes respectent la Notation 2.14 en dimension deux et la Notation 2.15 en dimension trois.

Quantités anisotropes

Nous introduisons ici quelques quantités anisotropes.

- La longueur des vecteurs $\mathbf{p}_{i,T}$ est dénotée par :

$$h_i = h_{i,T} := |\mathbf{p}_{i,T}|_{\mathbb{R}^N}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.31)$$

Par définition des vecteurs $\mathbf{p}_{i,T}$ et les notations ci-dessus, nous concluons immédiatement, $h_1 > h_2, \dots, \geq h_N$.

- La plus petite des longueurs $h_{i,T}$ sera très utilisée, donc nous définissons :

$$h_{\min,T} := \min_{i=1,\dots,N} \{h_{i,T}\} = h_{N,T}. \quad (2.32)$$

- En outre, les fonctions constantes par morceaux $h_i(x)$ et $h_{\min}(x)$ sont définies pour presque tout $x \in K$ par :

$$h_i(x) := h_{i,T}, \quad h_{\min}(x) := h_{\min,T}, \quad \forall x \in T, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.33)$$

- Pour une arête ou face E , nous notons par $|E|$ sa mesure qui s'exprime par :

$$|E| := \text{mes}_{N-1}(E). \quad (2.34)$$

- On définit également la longueur au-dessus d'une arête/face $E \in \mathcal{E}(T)$ par :

$$h_{E,T} := \frac{N|T|}{|E|}. \quad (2.35)$$

- Pour une arête (ou face) intérieure $E = \partial T_1 \cap \partial T_2$, nous introduisons :

$$h_{min,E} := \frac{h_{min,T_1} + h_{min,T_2}}{2}, \quad (2.36)$$

$$h_E := \frac{h_{E,T_1} + h_{E,T_2}}{2}. \quad (2.37)$$

- Pour une arête (ou face) frontière $E \in \mathcal{E}(T)$, on définit simplement :

$$h_{min,E} := h_{min,T} \text{ et } h_E := h_{E,T}. \quad (2.38)$$

- Soit T une maille arbitraire mais fixée. Nous utiliserons une transformation affine F_T qui sera définie comme suit : soit \vec{P}_0 le vecteur (colonne) d'origine, l'origine du système de coordonnées et d'extrémité P_0 , et $\overrightarrow{P_0 P_i}$ les vecteurs (colonnes) d'origine P_0 et d'extrémité P_i , $i = 1, \dots, N$. Nous définissons les matrices $\mathbb{A}_T, \mathbb{C}_T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ respectivement par,

$$\mathbb{A}_T := \left(\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_N} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_T := (\mathbf{p}_{1,T}, \dots, \mathbf{p}_{N,T}). \quad (2.39)$$

Nous considérons la transformation affine F_T qui correspond à $\mathbb{J}_T = \mathbb{A}_T$ et $\mathbf{m}_T = \vec{P}_0$.

- Parfois, nous aurons besoin de référer à la matrice \mathbb{C}_T non seulement sur une maille quelconque T mais sur les domaines plus larges. Ainsi nous introduisons une matrice (ou plus précisément une fonction matricielle) $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ qui est définie globalement pour presque tout $\mathbf{x} \in K$ et qui coïncide avec \mathbb{C}_T sur la maille T par :

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) := \mathbb{C}_T(\mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x} \in T. \quad (2.40)$$

De plus, on définit une matrice \mathbb{H}_T par :

$$\mathbb{H}_T := \text{diag}(h_1, \dots, h_N). \quad (2.41)$$

Les variables qui sont reliées à l'élément de référence \bar{T} sont référées avec bar (par exemple $\bar{\nabla}$).

- Le déterminant des matrices \mathbb{A}_T et \mathbb{C}_T sont donnés par [84, Page 18] :

$$|\det(\mathbb{A}_T)| = |\det(\mathbb{C}_T)| = \begin{cases} h_1 h_2 & = 2 \times |T| & \text{si } N = 2, \\ h_1 h_2 h_3 & = 6 \times |T| & \text{si } N = 3. \end{cases} \quad (2.42)$$

et

$$\bar{\nabla} \bar{v} = \mathbb{A}_T^{Tr} \nabla v. \quad (2.43)$$

A présent, nous bornons les normes des transformations matricielles [84, Lemme 2.2] :

Lemme 2.17. *(Norme de quelques matrices) On a les relations suivantes :*

$$\| \mathbb{A}_T^{Tr} \mathbb{C}_T^{-T} \|_{\mathbb{R}^{N \times N}} = \| \mathbb{C}_T^{-1} \mathbb{A}_T \|_{\mathbb{R}^{N \times N}} \sim 1 \quad (2.44)$$

$$\| \mathbb{C}_T^{Tr} \mathbb{A}_T^{-T} \|_{\mathbb{R}^{N \times N}} = \| \mathbb{A}_T^{-1} \mathbb{C}_T \|_{\mathbb{R}^{N \times N}} \sim 1 \quad (2.45)$$

$$\| \mathbb{C}_T \mathbb{H}_T^{-1} \|_{\mathbb{R}^{N \times N}} = \| \mathbb{H}_T \mathbb{C}_T^{-1} \|_{\mathbb{R}^{N \times N}} = 1 \quad (2.46)$$

$$\| \mathbb{H}_T^{-1} \|_{\mathbb{R}^{N \times N}} = \| \mathbb{C}_T^{-1} \|_{\mathbb{R}^{N \times N}} = h_{min,T}^{-1} \quad (2.47)$$

$$\| \mathbb{A}_T \|_{\mathbb{R}^{N \times N}} \sim \| \mathbb{C}_T \|_{\mathbb{R}^{N \times N}} \sim h_{max,T} \quad (2.48)$$

$$\| \mathbb{A}_T^{-1} \|_{\mathbb{R}^{N \times N}} \sim h_{min,T}^{-1}. \quad (2.49)$$

Lemme 2.18. [84, Page 19] Soit la transformation affine F_T définie par :

$F_T(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbb{A}_T \cdot \bar{\mathbf{x}} + \vec{P}_0$. Alors, on a les relations suivantes, pour tout $v \in L^2(T)$:

$$\| v \|_T = \sqrt{6|T|} \times \| \bar{v} \|_{\bar{T}}, \quad (2.50)$$

$$\| v \|_E = \sqrt{\frac{|E|}{|\bar{E}|}} \times \| \bar{v} \|_{\bar{E}}, \quad E \subset \partial T. \quad (2.51)$$

On introduit à présent la définition suivante [84, Définition 2.2] :

Définition 2.19. *(Dérivée directionnelle) Soit v une fonction dans l'espace de Sobolev $H^1(T)$. La dérivée directionnelle $\tilde{D}_{i,T}v$ de v ($i = 1, \dots, N$) est définie par :*

$$\left(\tilde{D}_{1,T}v, \dots, \tilde{D}_{N,T}v \right)^{Tr} := \mathbb{H}_T^{-1} \mathbb{C}_T^{Tr} \nabla v, \quad \forall v \in H^1(T), \quad (2.52)$$

c'est-à-dire,

$$\tilde{D}_{i,T}v = h_i^{-1} \cdot (\mathbf{p}_{i,T}, \nabla v)_{\mathbb{R}^N}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.53)$$

La composante $\tilde{D}_{i,T}v$ est la dérivée directionnelle de v le long de la direction $\mathbf{p}_{i,T}$.

Cette dérivée $\tilde{D}_{i,T}v$ est définie pour une cellule fixée T . Ainsi, nous introduisons une dérivée $\tilde{D}_i v$ qui est définie globalement pour presque tout $\mathbf{x} \in K$, et qui coïncide avec $\tilde{D}_{i,T}v$ sur une maille T par :

$$\tilde{D}_i v(\mathbf{x}) := \tilde{D}_{i,T}v(\mathbf{x}), \text{ pour } \mathbf{x} \in T. \quad (2.54)$$

Lemme 2.20. [84, Page 20] On a les égalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^N \left(\tilde{D}_i v \right)^2 = |\nabla v|_{\mathbb{R}^N}^2, \quad (2.55)$$

$$\| \mathbb{H}_T^{-1} \mathbb{C}_T^{Tr} \nabla v \|_T = \| \nabla v \|_T, \quad (2.56)$$

$$\sum_{i=1}^N h_i^2 \left(\tilde{D}_i v \right)^2 = |\mathbb{C}_T^{Tr} \nabla v|_{\mathbb{R}^N}^2, \quad (2.57)$$

$$\sum_{i=1}^N h_i^2 \| \tilde{D}_{i,T}v \|_T^2 = \| \mathbb{C}_T^{Tr} \nabla v \|_T^2. \quad (2.58)$$

Preuve. Les vecteurs lignes de la matrice carrée $\mathbb{H}_T^{-1} \mathbb{C}_T^{Tr}$ sont deux-à-deux orthogonaux et unitaires. Donc la matrice $\mathbb{H}_T^{-1} \mathbb{C}_T^{Tr}$ est une matrice orthogonale et le lemme suit.

■

Hypothèses sur la triangulation et sur les mailles

Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille de triangulations sur $\bar{\Omega}$. Sur cette famille, nous admettons quelques hypothèses comme suit :

Hypothèse 2.21. Le maillage \mathcal{T}_h sur $\bar{\Omega}$ est conforme dans le sens de la Définition 2.10;

Hypothèse 2.22. Afin de générer une triangulation conforme sur chaque sous domaine Ω_l , nous supposons que, pour chaque $h > 0$ et pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$, on a soit $T \subset \Omega_s$, soit $T \subset \Omega_d$. On désigne alors dans ce cas par $\{\mathcal{T}_h^l\}_{h>0}$, la famille de triangulations conformes induite par la famille $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ sur $\bar{\Omega}_l$, $l = s$ ou $l = d$;

Hypothèse 2.23. Le nombre de mailles de la famille de triangulations $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ associé à un nœud \mathbf{x} est uniformément borné, c'est-à-dire, il existe un entier naturel N_b non

nul tel que : $\forall h > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}_h(\bar{\Omega})$, on ait : $\text{Card}(\mathcal{W}_{\mathbf{x}}) \leq N_b$, où

$$\mathcal{W}_{\mathbf{x}} := \{T \in \mathcal{T}_h : \mathbf{x} \in \mathcal{N}(T)\}; \quad (2.59)$$

Hypothèse 2.24. Enfin, nous supposons que, pour deux mailles voisines T_1 et T_2 de la triangulation \mathcal{T}_h (i.e. $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$), on a (2.60) :

$$h_{i,T_1} \sim h_{i,T_2}, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (2.60)$$

Remarque 2.25. En se référant à (2.36), (2.38) et (2.37), on déduit que la dernière Hypothèse 2.24 implique $h_E \sim h_{E,T_1} \sim h_{E,T_2}$ et $h_{\min,E} \sim h_{\min,T_1} \sim h_{\min,T_2}$.

Remarque 2.26. Notons que, parmi ces hypothèses, la seule hypothèse liée au couplage est l'Hypothèse 2.22. Par conséquent, sur un domaine quelconque, nous admettons les Hypothèses 2.21, 2.23 et 2.24 pour les maillages anisotropes.

2.4 Propriétés de quelques éléments finis

2.4.1 Éléments finis de Crouzeix-Raviart

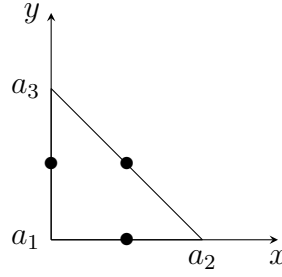
On propose dans cette sous-section, une brève description des éléments finis de Crouzeix-Raviart. Ces éléments finis sont de type non-conforme, autrement dit que l'espace des approximations n'est pas un sous espace de l'espace auquel appartient la solution continue.

Description géométrique

Dans le cadre $2d$, l'élément fini est représenté par une maille triangulaire dont les degrés de liberté correspondent au milieu de chacune des arêtes comme le montre la Figure 2.11 ci-dessous. Les cercles noirs sur chaque arête indiquent que le degré de liberté consiste à évaluer la valeur moyenne sur cette arête. Clairement, cet élément présente des discontinuités au niveau des interfaces des arêtes, le seul point de continuité au niveau des interfaces étant le milieu des arêtes.

Dans le cadre $3d$, l'élément fini est représenté par un tétraèdre dont les degrés de liberté correspondent aux barycentres des faces des tétraèdres.

Soit $T = (a_1, \dots, a_{N+1})$ un simplexe de \mathbb{R}^N . On pose $P = \mathbb{P}^1(T)$ et on prend pour degrés de liberté de $p \in P$ sa valeur moyenne sur les $N+1$ faces de T . On a donc pour

FIGURE 2.11 – Élément fini \mathbb{P}^1 non-conforme $2d$.

$i \in \{0, \dots, N\}$,

$$\sigma_i(p) := \frac{1}{|E_i|} \int_{E_i} p. \quad (2.61)$$

En posant $\Sigma = \{\sigma_i\}_{0 \leq i \leq N}$, on montre que le triplet $\{T, P, \Sigma\}$ est un élément fini [63, Page 83].

En utilisant les fonctions coordonnées barycentriques $(\lambda_0, \dots, \lambda_N)$, les fonctions de forme sont telles que :

$$\psi_i = 1 - N\lambda_i, \quad i \in \{0, \dots, N\}. \quad (2.62)$$

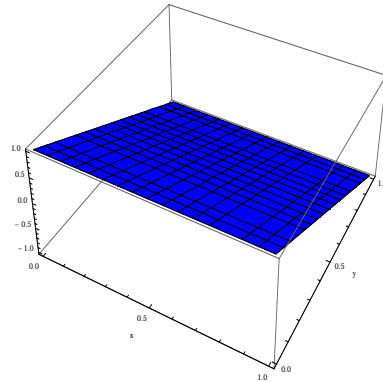
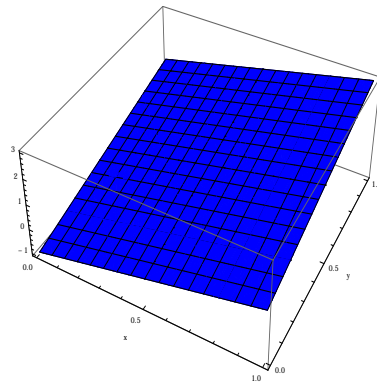
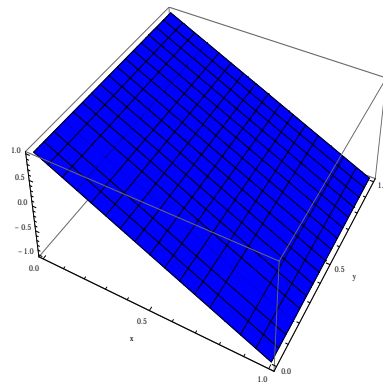
Sur l'élément fini de référence \bar{T} , les fonctions de forme en $2d$ sont données par :

$$\begin{cases} \bar{\psi}_0(\bar{x}, \bar{y}) &= 1 - 2\bar{y}, \\ \bar{\psi}_1(\bar{x}, \bar{y}) &= -1 + 2\bar{x} + 2\bar{y}, \\ \bar{\psi}_2(\bar{x}, \bar{y}) &= 1 - 2\bar{x}. \end{cases} \quad (2.63)$$

Définitions et propriétés

Etant donnée une arête E , on choisit une direction normale arbitraire \mathbf{n}_E et on définit T_{in} et T_{ext} comme étant les deux éléments partageant cette arête ou face. On peut supposer, sans aucune restriction que $\mathbf{n}_E = (n_{E1}, n_{E2})$ pointe vers T_{ext} comme l'indique la Figure 2.15. Le vecteur tangent est défini par $\mathbf{t}_E = (n_{E2}, -n_{E1})$.

Propriétés de Crouzeix-Raviart. On utilisera également, lors de l'analyse d'erreur

FIGURE 2.12 – Fonction de base $\bar{\psi}_0$.FIGURE 2.13 – Fonction de base $\bar{\psi}_1$.FIGURE 2.14 – Fonction de base $\bar{\psi}_2$.

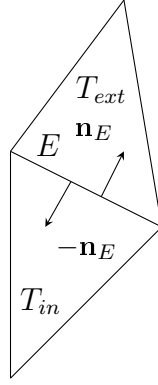


FIGURE 2.15 – Deux triangles partageant une arête intérieure.

a-posteriori par éléments finis, les propriétés suivantes sur la vitesse approchée :

$$\int_E [\mathbf{u}_h]_E = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+), \quad (2.64)$$

$$\int_E [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_E]_E = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d) \cup \mathcal{E}_h(\partial\Omega_d), \quad (2.65)$$

où le saut d'une fonction φ à travers une arête/face E au point x est défini par,

$$[\varphi]_E(x) := \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(x + t\mathbf{n}_E) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(x - t\mathbf{n}_E) & \text{si } E \in \mathcal{E}_h(\Omega), \\ - \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(x - t\mathbf{n}_E) & \text{si } E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega). \end{cases} \quad (2.66)$$

Notons également que le signe de $[\varphi]_E(x)$ dépend de l'orientation de \mathbf{n}_E . Néanmoins, des quantités telles que le saut du gradient $[\nabla\varphi(x) \cdot \mathbf{n}_E]_E$ sont indépendantes de cette orientation.

Remarque 2.27. Les propriétés (2.64) et (2.65) imposées sur la vitesse approchée \mathbf{u}_h sont naturelles, puisqu'elles respectent la régularité de \mathbf{u} dans chaque sous domaine. C'est une variante de l'hypothèse de Crouzeix-Raviart standard pour les approximations non-conformes.

2.4.2 Éléments finis de Nédélec

Soit $T = (a_1, \dots, a_{N+1})$ un simplexe de \mathbb{R}^N , $N = 2$ ou $N = 3$. On considère l'espace vectoriel des polynômes à valeurs dans \mathbb{R}^N défini par :

$$\mathbb{N}_0(T) = [\mathbb{P}^0]^2 \oplus \mathbb{P}^0(x_2, -x_1)^{Tr} \quad \text{si } N = 2, \quad (2.67)$$

$$\mathbb{N}_0(T) = [\mathbb{P}^0]^3 \oplus (x \times [\mathbb{P}^0]^3) \quad \text{si } N = 3. \quad (2.68)$$

On désigne par n_e le nombre d'arêtes/faces de T . On a donc $n_e = 3$ si $N = 2$ et $n_e = 6$ si $N = 3$. On désigne par $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n_e}$ l'ensemble des arêtes/faces de T . Pour chaque arête/face E_i , on choisit un vecteur unitaire tangent qu'on note \mathbf{t}_i . On prend pour degré de liberté de $\mathbf{p} \in \mathbb{N}_0$ l'intégrale de la composante tangentielle de \mathbf{p} le long des n_e arêtes/faces de T comme l'indique la Figure 2.16 ci-dessous. Les flèches sur chaque arête indiquent que le degré de liberté consiste à évaluer l'intégrale de la composante tangentielle (orientée dans le sens de la flèche) sur cette arête.

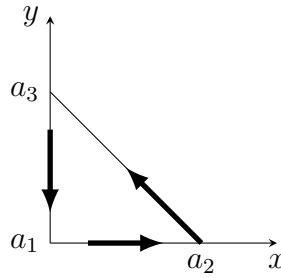


FIGURE 2.16 – Élément fini de Nédélec en $2d$.

Pour $i \in \{1, \dots, n_e\}$, les degrés de liberté sont définis de la manière suivante :

$$\sigma_i(\mathbf{p}) := \int_{E_i} \mathbf{p} \cdot \mathbf{t}_i. \quad (2.69)$$

En posant $\Sigma = \{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq n_e}$, on montre que le triplet $(T, \mathbb{N}_0(T), \Sigma)$ est un élément fini [63, Page 90].

2.5 Outils d'analyse

Nous regroupons dans cette section, les outils d'analyse, notamment les opérateurs d'interpolation de Clément, les fonctions bulles, opérateurs d'extensions, inégalités inverses et de trace, les formules de Green.

2.5.1 Opérateurs d'interpolation de Clément-Cas isotrope

Nous aurons besoin d'un opérateur d'interpolation, qui constitue un outil primordial pour la majoration de l'erreur a-posteriori, c'est-à-dire l'estimé (1.7). Plusieurs choix sont possibles en fonction de la nature de l'approximation. Pour des interpolations de degré 1, l'interpolé de Clément est par exemple très souvent utilisé. Il s'agit d'un opérateur d'approximation régularisé, qui envoie une fonction de $H^1(\Omega)$ vers une fonction continue et affine par morceaux. L'interpolé classique de Lagrange est souvent inadapté, car hormis le cas particulier de la dimension 1, $H^1(\Omega)$ ne s'injecte pas dans $C^0(\Omega)$.

• Introduisons les espaces :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &:= \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_s \cup \Gamma_d \right\}, \\ V_{\text{cl}} &:= \left\{ v_h \in C^0(\Omega) : v_h|_T \circ F_T \in \mathbb{P}^k(\bar{T}), \forall T \in \mathcal{T}_h, k \in \mathbb{N}^* \right\}. \end{aligned}$$

F_T est la transformation affine linéaire de \bar{T} dans T de la Figure 2.4.

Posons :

$$\mathbf{V}_{\text{cl}}^0 := [V_{\text{cl}}]^N \cap \mathbf{V} \text{ et } V_{\text{cl}}^0 := V_{\text{cl}} \cap H_0^1(\Omega). \quad (2.70)$$

Désignons ensuite par $\mathbf{H}_{h,1}$ l'espace d'éléments finis de Nédélec :

$$\mathbf{H}_{h,1} := \left\{ \mathbf{v}_h \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d) : \mathbf{v}_h|_T \in \mathbb{N}_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h^d \right\}, \quad (2.71)$$

où l'ensemble $\mathbb{N}_0(T)$ est défini par (2.68).

• On fixe $k = 1$ et nous définissons l'opérateur d'interpolation de Clément comme dans [49], $I_{\text{cl}}^0 : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}_{\text{cl}}^0$ par :

$$I_{\text{cl}}^0 \mathbf{v} := \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h(\Omega)} \frac{1}{\text{Card}(W_{\mathbf{x}})} \left(\int_{W_{\mathbf{x}}} \mathbf{v} \right) \varphi_{\mathbf{x}}. \quad (2.72)$$

Pour $\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^N$, l'interpolé de Clément de \mathbf{w} est noté $I_{\text{cl}} \mathbf{w}$ et est défini par :

$$I_{\text{cl}} \mathbf{w} := \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h(\bar{\Omega})} \frac{1}{\text{Card}(W_{\mathbf{x}})} \left(\int_{W_{\mathbf{x}}} \mathbf{w} \right) \varphi_{\mathbf{x}} \in [V_{\text{cl}}]^N. \quad (2.73)$$

La fonction de base $\varphi_{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}_{\text{cl}}^0$ (resp. $\varphi_{\mathbf{x}} \in [V_{\text{cl}}]^N$) associée à un sommet

$\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h(\Omega)$ (resp. $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h(\bar{\Omega})$) est uniquement déterminée par la condition :

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{N}_h(\Omega) \quad \left[\text{resp. } \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{N}_h(\bar{\Omega}) \right], \quad (2.74)$$

où $\mathcal{N}_h(\Omega)$ est l'ensemble des sommets non situés sur $\Gamma_s \cup \Gamma_d$ et $W_{\mathbf{x}} := \{T \in \mathcal{T}_h : \mathbf{x} \in \mathcal{N}(T)\}$.

Remarque 2.28. Notons que dans ces définitions, les fonctions de base sont des fonctions vectorielles, donc l'interpolé est défini composante par composante. Notons également que la définition donnée en (2.72) est valable pour les fonctions scalaires dans $H_0^1(\Omega)$ tandis que la définition donnée en (2.73) est valable pour les fonctions scalaires dans $H^1(\Omega)$. Dans ce cas, les fonctions de base $\varphi_{\mathbf{x}}$ sont des fonctions scalaires.

Pour majorer globalement l'erreur par l'estimateur d'erreur a-posteriori, on aura aussi besoin à interpoler les fonctions de $[H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$. Cet opérateur est défini à l'aide des fonctions de base $\mathbf{w}_E \in \mathbf{H}_{h,1}$, $E \in \mathcal{E}_h(\bar{\Omega}_d)$ par la condition :

$$\int_{E'} \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{t}_{E'} = \delta_{E,E'}, \quad \forall E' \in \mathcal{E}_h(\bar{\Omega}_d), \quad (2.75)$$

où $\mathbf{t}_{E'}$ est le vecteur unitaire tangent à E' . On introduit la définition suivante [90], qui est valable seulement en dimension $N = 3$:

Définition 2.29. ([90]) Soit une arête $E \in \mathcal{E}_h(\bar{\Omega}_d)$, fixons l'une de ces faces adjacentes $F_E \in \mathcal{F}$. Alors l'opérateur d'interpolation de type Clément, $\mathcal{P}_{cl} : [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d) \longrightarrow \mathbf{H}_{1,h}$ est défini ici par :

$$\mathcal{P}_{cl}\psi := \sum_{E' \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} \left(\int_{F_E} (\psi \times \mathbf{n}_{F_E}) \cdot \mathbf{f}_{E'}^{F_E} \right) \mathbf{w}_{E'}, \quad (2.76)$$

où les fonctions vectorielles $\mathbf{f}_{E'}^{F_E}$ sont déterminées par la condition,

$$\int_{F_E} (\mathbf{w}_{E'} \times \mathbf{n}_{F_E}) \cdot \mathbf{f}_{E''}^{F_E} = \delta_{E',E''}, \quad \forall E', E'' \in \mathcal{E}_h(\bar{\Omega}_d) \cap \partial F_E. \quad (2.77)$$

Ces opérateurs d'interpolations vérifient les propriétés d'interpolations locales suivantes :

Lemme 2.30. (Estimations d'interpolations de Clément-Cas isotrope) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant les Hypothèses 2.21 et 2.22. Alors, nous avons les estimations suivantes pour tous $\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^N$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ et

$$\psi \in [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d) :$$

$$\| \mathbf{v} - I_{cl}^0(\mathbf{v}) \|_T \lesssim h_T \| \mathbf{v} \|_{1,\Delta(T)} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^l, l = s, d, \quad (2.78)$$

$$\| \mathbf{v} - I_{cl}^0(\mathbf{v}) \|_E \lesssim [\text{diam}(E)]^{1/2} \| \mathbf{v} \|_{1,\Delta(E)} \quad \forall E \in \mathcal{E}_h(\Omega_l), l = s, d, \quad (2.79)$$

$$\| \mathbf{w} - I_{cl}(\mathbf{w}) \|_T \lesssim h_T \| \mathbf{w} \|_{1,\Delta(T)} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^l, l = s, d, \quad (2.80)$$

$$\| \mathbf{w} - I_{cl}(\mathbf{w}) \|_E \lesssim [\text{diam}(E)]^{1/2} \| \mathbf{w} \|_{1,\Delta(E)} \quad \forall E \in \mathcal{E}_h(\overline{\Omega}_l), l = s, d, \quad (2.81)$$

$$\| \psi - \mathcal{P}_{cl}(\psi) \|_T \lesssim h_T \| \psi \|_{1,\Delta(T)} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^d, \quad (2.82)$$

$$\| \psi - \mathcal{P}_{cl}(\psi) \|_E \lesssim [\text{diam}(E)]^{1/2} \| \psi \|_{1,\Delta(E)} \quad \forall E \in \mathcal{E}_h(\overline{\Omega}_d), \quad (2.83)$$

où $\Delta(T) := \cup \{T' \in \mathcal{T}_h : T' \cap T \neq \emptyset\}$ et $\Delta(E) := \cup \{T' \in \mathcal{T}_h : T' \cap E \neq \emptyset\}$.

Preuve. Les estimés (2.78) à (2.81) sont démontrées dans [49] tandis que les estimés (2.82) à (2.83) sont démontrées dans [22]. On pourra également se référer à [101, 113] pour des estimations équivalentes faisant intervenir d'autres opérateurs. ■

2.5.2 Fonctions bulles, opérateurs d'extensions et inégalités inverses

Pour minorer localement l'erreur par les indicateurs d'erreur locaux, nous aurons besoin des fonctions bulles et opérateurs d'extensions satisfaisant certaines propriétés.

Fonctions bulles : On définit ici les fonctions bulles.

- La fonction bulle b_T sur une maille T est un élément de $\mathbb{P}^{N+1}(T)$, définie par :

$$b_T := (N+1)^{N+1} \times \prod_{i=1}^{N+1} \lambda_{i,T}, \quad (2.84)$$

où les $\lambda_{i,T}$ sont des fonctions coordonnées barycentriques associées à T .

- Si $E \in \mathcal{E}(T)$, on définit $b_{E,T} \in \mathbb{P}^N(T)$ par :

$$b_{E,T} := N^N \times \prod_{i=1}^N \lambda_{x_i,T}. \quad (2.85)$$

On définit ensuite b_E sur $W_E := T_1 \cup T_2$, où $E = \partial T_1 \cap \partial T_2$ par :

$$b_{E|T_i} := b_{E,T_i}, \forall i \in \{1, 2\}. \quad (2.86)$$

Opérateurs d'extensions : On aura également besoin d'un opérateur d'extension $F_{ext} : C^0(E) \longrightarrow C^0(T \cup \mathcal{E}(T))$ défini par :

$$F_{ext}(\varphi)(x) := \varphi|_E(x) \equiv \text{const}, \forall x \in T \cup \mathcal{E}(T). \quad (2.87)$$

Sur $K_E := \bar{T}_1 \cup \bar{T}_2$ où $E = \partial T_1 \cap \partial T_2$, on définit l'opérateur d'extension

$$F_{ext} : C^0(E) \longrightarrow C^0(K_E) \text{ par } F_{ext}(\varphi)|_{\bar{T}_i}(x) := \varphi|_E(x) \equiv \text{const}, \forall x \in \bar{T}_i, i = 1, 2.$$

Notons que pour les fonctions vectorielles, l'opérateur d'extension est défini composante par composante.

Nous donnons dans la Table 2.1 ci-dessous leurs expressions explicites sur l'élément de référence \bar{T} . Dans ce tableau, on a supposé sans perte de généralité que \bar{E} est sur l'axe (O, \bar{x}) si $N = 2$ et dans le plan (O, \bar{x}, \bar{y}) si $N = 3$.

Alors, on utilise la transformation affine F_T (cf. Figure 2.4) pour définir b_T , $b_{E,T}$ et F_{ext} . On a : $b_T := b_{\bar{T}} \circ F_T^{-1}$, $b_{E,T} := b_{\bar{E},\bar{T}} \circ F_T^{-1}$ et $F_{ext}(\varphi) := \bar{F}_{ext} \circ F_T^{-1}(\varphi)$.

Lemme 2.31. ([84]) *Les fonctions bulles vérifient les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} b_T &= 0 \text{ sur } \partial T, \\ b_E &= 0 \text{ sur } \partial W_E, \\ \|b_T\|_{L^\infty(T)} &= \|b_E\|_{L^\infty(W_E)} = 1, \\ 0 &\leq b_T \leq 1, \\ 0 &\leq b_E \leq 1. \end{aligned}$$

Remarque 2.32. *Le fait que les fonctions bulles soient nulles sur ∂T (ou sur ∂W_E) permet en effectuant des intégrations par parties adéquates, de faire apparaître la norme de l'erreur locale en annulant les termes de bord qui interviennent dans les calculs.*

Inégalités inverses : Nous donnons à présent certaines inégalités inverses, lesquelles sont systématiquement utilisées pour établir la minoration locale de l'erreur, c'est-à-dire une estimation locale du type (1.10). L'idée principale consiste à majorer successivement chacun des termes intervenant dans la définition de l'indicateur local Θ_T . Le choix \mathbb{P}^k couvre tous les cas relevant de notre étude. Ces inégalités sont données par le Lemme 2.33 :

Lemme 2.33. ([111] *Inégalités inverses-Cas isotrope*) *Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant l'Hypothèse 2.21. Alors pour tous $v_T \in [\mathbb{P}^{k_0}(T)]^N$*

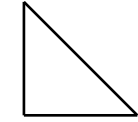
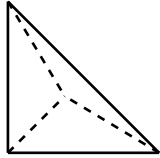
Elément de référence \bar{T}	Fonction bulle associée $b_{\bar{T}}$	Opérateur d'extension \bar{F}_{ext}
 $0 \leq \bar{x}, \bar{y}$ $\bar{x} + \bar{y} \leq 1$	$b_{\bar{T}} := 3^3 \bar{x} \bar{y} (1 - \bar{x} - \bar{y})$ $b_{\bar{E}, \bar{T}} := 2^2 \bar{x} (1 - \bar{x} - \bar{y})$	$\bar{F}_{ext}(v_{\bar{E}})(\bar{x}, \bar{y}) := v_{\bar{E}}(\bar{x})$
 $0 \leq \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} \leq 1$	$b_{\bar{T}} := 4^4 \bar{x} \bar{y} \bar{z} (1 - \bar{x} - \bar{y} - \bar{z})$ $b_{\bar{E}, \bar{T}} := 3^3 \bar{x} \bar{y} (1 - \bar{x} - \bar{y} - \bar{z})$	$\bar{F}_{ext}(v_{\bar{E}})(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) := v_{\bar{E}}(\bar{x}, \bar{y})$

TABLE 2.1 – Fonctions bulles et opérateurs d'extensions sur l'élément de référence \bar{T} .

et $\mathbf{v}_E \in [\mathbb{P}^{k_1}(E)]^N$, avec $E \in \mathcal{E}(T)$, on a des équivalences et des inégalités suivantes :

$$\| \mathbf{v}_T b_T^{1/2} \|_T \sim \| \mathbf{v}_T \|_T, \quad (2.88)$$

$$\| \nabla(\mathbf{v}_T b_T) \|_T \lesssim h_T^{-1} \| \mathbf{v}_T \|_T, \quad (2.89)$$

$$\| \mathbf{v}_E \|_E \sim \| b_E^{1/2} \mathbf{v}_E \|_E, \quad (2.90)$$

$$\| F_{ext}(\mathbf{v}_E) b_E \|_T \lesssim [\text{diam}(E)]^{1/2} \| \mathbf{v}_E \|_E, \quad (2.91)$$

$$\| \nabla(F_{ext}(\mathbf{v}_E) b_E) \|_T \lesssim [\text{diam}(E)]^{-1/2} \| \mathbf{v}_E \|_E. \quad (2.92)$$

2.5.3 Formules de Green

Nous aurons très souvent besoin d'intégrer par partie. Les formules de Green suivantes seront souvent utilisées [67, 89] :

- Pour tous $u, v \in H^1(K)$, on a,

$$\int_K \left\{ u \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} dx = \int_{\partial K} \gamma_0 u \gamma_0 v \nu_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.93)$$

- Pour tous $u \in H^2(K)$ et $v \in H^1(K)$, on a,

$$\int_K (\Delta u) v = - \int_K \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial K} \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \nu} \gamma_0 v. \quad (2.94)$$

- Pour $\mathbf{v} \in [H^1(K)]^N$ et $q \in H^1(K)$, on a,

$$\int_K q \operatorname{div} \mathbf{v} = - \int_K \mathbf{v} \cdot \nabla q + \int_{\partial K} \gamma_0 q \nu \cdot \gamma_0 \mathbf{v}, \quad (2.95)$$

où $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N) \in \mathbb{R}^N$ est la normale unitaire sur ∂K dirigée vers l'extérieure.

- Pour tout $\psi \in [H^1(K)]^3$ si $N = 3$ ou $\psi \in H^1(K)$ si $N = 2$, on a,

$$\int_K w \operatorname{rot} \psi - \int_K \psi \operatorname{rot} w = \int_{\partial K} \gamma_0 w \gamma_\tau \psi, \quad \forall w \in H(\operatorname{rot}, K). \quad (2.96)$$

2.5.4 Généralisation de certains outils dans le cas d'une discrétisation anisotrope

Pour un maillage anisotrope, certaines inégalités inverses comme (2.89), (2.91) et (2.92) ont besoin d'être reprécisées. En effet, les constantes intervenant dans ces relations dépendent de la qualité du maillage, et en particulier de son degré d'anisotropie.

Elles sont donc susceptibles d'exploser si l'angle minimum d'une cellule tend vers zéro. Ce qui rend les inégalités inverses (2.89), (2.91) et (2.92) totalement inexploitable. On montre alors que si par exemple des inégalités comme (2.88) et (2.90) restent valables dans le cadre anisotrope, (2.89), (2.91) et (2.92) se généralisent respectivement en [12, 84, 102] :

$$\| \nabla(\mathbf{v}_T b_T^{1/2}) \|_T \lesssim h_{min,T}^{-1} \| \mathbf{v}_T \|_T \quad (2.97)$$

$$\| F_{ext}(\mathbf{v}_E) b_E \|_T \lesssim h_{E,T}^{1/2} \| \mathbf{v}_E \|_E \quad (2.98)$$

$$\| \nabla(F_{ext}(\mathbf{v}_E) b_E) \|_T \lesssim h_{E,T}^{1/2} h_{min,T}^{-1} \| \mathbf{v}_E \|_E \quad (2.99)$$

De même, les estimations d'interpolation de Clément (2.78)-(2.83) reposent elles aussi sur la propriété d'isotropie du maillage. Elles sont généralisées pour le cas anisotrope grâce à l'utilisation *des mesures d'alignements* [84, 85, 86, 90] que nous reprecisons dans le chapitre 3.

2.5.5 Inégalités de trace et de Young

• **Inégalités de trace** : Nous donnons ici quelques inégalités de trace qui joueront un rôle très important dans les estimations d'interpolation.

Lemme 2.34. (*Inégalité de trace-Cas isotrope [105]*) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, une famille régulière de triangulations conformes sur \bar{K} . Alors, pour toute fonction scalaire $\phi \in H^1(T)$, avec $T \in \mathcal{T}_h$, on a :

$$\| \phi \|_{\partial T}^2 \lesssim (h_T^{-1} \| \phi \|_T^2 + h_T \| \nabla \phi \|_T^2). \quad (2.100)$$

Pour le cas d'une discrétisation anisotrope, cette inégalité de trace s'énonce comme suit [84, Lemme 2.3 et Lemme 2.4] :

Lemme 2.35. ([84, Lemme 2.3] Première inégalité de trace-Cas anisotrope) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille de triangulations conformes et anisotropes sur \bar{K} . Alors, pour toute fonction scalaire $\phi \in H^1(T)$, avec $T \in \mathcal{T}_h$ et $E \in \mathcal{E}(T)$, on a l'estimation :

$$\| \phi \|_E^2 \lesssim h_E^{-1} (\| \phi \|_T^2 + \| \mathbb{C}_T^{Tr} \nabla \phi \|_T^2), \quad (2.101)$$

ou encore sous forme composante par composante :

$$\|\phi\|_E^2 \lesssim h_E^{-1} \left(\|\phi\|_T^2 + \sum_{i=1}^N h_{i,T}^2 \|\tilde{D}_i \phi\|_T^2 \right). \quad (2.102)$$

Lemme 2.36. ([84, Lemme 2.3] Deuxième inégalité de trace-Cas anisotrope) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille de triangulations conformes et anisotropes sur \overline{K} . Alors, pour toute fonction scalaire $\phi \in H^1(T)$, avec $T \in \mathcal{T}_h$ et $E \in \mathcal{E}(T)$, on a l'estimation :

$$\|\phi\|_E^2 \lesssim h_E^{-1} \|\phi\|_T \left(\|\phi\|_T^2 + \|\mathbb{C}_T^{Tr} \nabla \phi\|_T^2 \right), \quad (2.103)$$

ou encore sous forme composante par composante :

$$\|\phi\|_E^2 \lesssim h_E^{-1} \|\phi\|_T \left(\|\phi\|_T^2 + \sum_{i=1}^N h_{i,T}^2 \|\tilde{D}_i \phi\|_T^2 \right). \quad (2.104)$$

• **Inégalité de Young** : Soit p et q deux nombres réels strictement supérieurs à 1, tels que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Alors,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (a, b) \in]0; +\infty[^2. \quad (2.105)$$

2.6 Inégalité de Korn classique

Lemme 2.37. ([48, 60, 91] Inégalité de Korn classique) Si K est suffisamment régulier, alors il existe une constante $C_K > 0$ (dite constante de Korn) telle que :

$$\|\mathbf{v}\|_{1,K} \leq C_K (\|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_K + \|\mathbf{v}\|_K), \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^N, \quad (2.106)$$

ou de façon équivalente :

$$\|\mathbf{v}\|_{1,K} \leq C_K (\|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_K + \|\mathbf{v}\|_K), \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^N. \quad (2.107)$$

Définissons l'espace :

$$\mathbf{RM}(K) := \{\mathbf{x} \in K \mapsto \mathbf{a} + \mathbb{M} \cdot \mathbf{x} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \text{ et } \mathbb{M} \in \mathbb{SO}(N)\}, \quad (2.108)$$

où $\mathbb{SO}(N)$ est l'algèbre de Lie des matrices $N \times N$ antisymétriques. L'espace $\mathbf{RM}(K)$ a la propriété suivante :

Lemme 2.38. (cf. [35]) L'espace $\mathbf{RM}(K)$ est précisément le noyau du tenseur de

déformation \mathbb{D} , c'est-à-dire :

$$\forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^N, \mathbb{D}(\mathbf{v}) = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^{N \times N}} \iff \mathbf{v} \in \mathbf{RM}(K). \quad (2.109)$$

Soit maintenant ϕ une semi-norme sur $[H^1(K)]^N$ avec les propriétés suivantes :

$$\exists C_\phi > 0 / \phi(\mathbf{v}) \leq C_\phi \|\mathbf{v}\|_{1,K}, \forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^N, \quad (2.110)$$

$$\phi(\mathbf{m}) = 0 \text{ et } \mathbf{m} \in \mathbf{RM}(K) \iff \mathbf{m} = \text{un vecteur constant}. \quad (2.111)$$

Comme ϕ est une semi-norme, ϕ vérifie trivialement la relation :

$$\phi(\mathbf{m}) = 0, \forall \mathbf{m} \in \mathbb{R}^N \iff \phi(\mathbf{v} + \mathbf{c}) = \phi(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^N, \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^N. \quad (2.112)$$

Lemme 2.39. (cf. [35]) Soit ϕ une semi-norme satisfaisant les conditions (2.110) et (2.111). Alors, l'inégalité de Korn classique (2.106) implique l'inégalité :

$$\|\mathbf{v}\|_{1,K} \leq C_K (\|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_K + \phi(\mathbf{v})), \forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^N. \quad (2.113)$$

Exemple 2.40. (cf. [35]) Nous donnons ici quelques exemples de semi-norme ϕ satisfaisant les conditions (2.110) et (2.111).

1. $\phi(\mathbf{v}) = \|\mathcal{Q}\mathbf{v}\|_K$, où l'opérateur \mathcal{Q} est défini par :

$$\mathcal{Q}\mathbf{v} := \mathbf{v} - \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{v}. \quad (2.114)$$

2. $\phi(\mathbf{v})$ est définie par :

$$\phi(\mathbf{v}) := \sup_{\mathbf{m} \in \mathbf{RM}(K), \|\mathbf{m}\|_{\partial K} = 1, \int_{\partial K} \mathbf{m} = 0} \int_K |\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}|, \forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^N. \quad (2.115)$$

3. Le dernier exemple de ϕ est donné par :

$$\phi(\mathbf{v}) := \left| \int_K \mathbf{rot} \mathbf{v} \right|_{\mathbb{R}^N}, \forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^N, \quad (2.116)$$

où

$$\left| \int_K \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \right|_{\mathbb{R}^N} = \begin{cases} \left| \int_K \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \right| & \text{si } N = 2, \\ \left| \int_K \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \right|_{\mathbb{R}^3} & \text{si } N = 3. \end{cases} \quad (2.117)$$

Remarque 2.41. (*Quelques restrictions*)

1. Pour le premier exemple de semi-norme, l'inégalité de Korn (2.106) est du coup équivalente à l'inégalité (2.113) puisqu'on a trivialement $\|\mathbf{Qv}\|_K \leq \|\mathbf{v}\|_K$.

2. Pour le second exemple, l'inégalité (2.113) implique l'inégalité de Korn,

$$\|\mathbf{v}\|_{1,K} \leq C_K \|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_K \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^N, \mathbf{v}|_{\Gamma_K \cap \partial K} = \mathbf{0}. \quad (2.118)$$

3. Pour le dernier exemple, l'inégalité (2.113) implique l'inégalité de Korn,

$$\|\mathbf{v}\|_{1,K} \leq C_K \|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_K \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^N, \left| \int_K \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \right|_{\mathbb{R}^N} = 0. \quad (2.119)$$

2.7 Formulation faible associée au problème couplé Stokes-Darcy

• Théorème de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi.

Nous rappelons d'abord le théorème de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB). Ce théorème permet de montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour les problèmes mixtes. Nous considérons le problème variationnel suivant : Etant donnée $(L, G) \in X' \times M'$, on cherche $(u, p) \in X \times M$ tel que,

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) &= L(v), \quad \forall v \in X, \\ b(u, q) &= G(q), \quad \forall q \in M, \end{cases} \quad (2.120)$$

où X, M sont des espaces de Hilbert muni de leurs normes respectives $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_M$. $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ sont des formes bilinéaires continues.

Théorème 2.42. ([63] Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi)

On suppose que la forme bilinéaire a est coercive sur l'espace fermé,

$$\mathbf{Z} = \{v \in X : b(v, q) = 0 \quad \forall q \in M\} = \text{Kerb}. \quad (2.121)$$

Alors, le problème (2.120) admet une solution et une seule si et seulement si la forme bilinéaire b satisfait la condition inf-sup suivante sur $X \times M$, i.e. il existe une constante $\exists C_0 > 0$ telle que,

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \times \|q\|_M} \geq C_0. \quad (2.122)$$

• Formulation faible sans multiplicateurs de Lagrange sur l'interface.

Rappelons que, pour deux fonctions matricielles $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ de $[L^2(K)]^{N \times N}$, on définit le produit scalaire $(A, B)_K$ par :

$$(A, B)_K := \sum_{i, j=1}^N \int_K a_{ij} b_{ij}. \quad (2.123)$$

1. Supposons que les solutions \mathbf{u} et p sont suffisamment régulières. On commence par multiplier la première équation du système de Stokes (1.1) par une fonction test $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$ puis on intègre sur Ω_s . On a formellement :

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_s, \mathbf{v}_s)_{\Omega_s} &= 2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}_s), \mathbb{D}(\mathbf{v}_s))_{\Omega_s} - (p_s, \operatorname{div} \mathbf{v}_s)_{\Omega_s} \\ &+ \left(\{p_s - 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_s^{Tr}\}, \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_s \right)_{\Gamma_I} \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} (-2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_s) \cdot \tau_j^{Tr}, \mathbf{v}_s \cdot \tau_j)_{\Gamma_I}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Les conditions d'interface (1.5)₂ et (1.5)₃ dans (2.124) entraînent :

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_s, \mathbf{v}_s)_{\Omega_s} &= 2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}_s), \mathbb{D}(\mathbf{v}_s))_{\Omega_s} - (p_s, \operatorname{div} \mathbf{v}_s)_{\Omega_s} \\ &+ (p_d, \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_s)_{\Gamma_I} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_s \cdot \tau_j, \mathbf{v}_s \cdot \tau_j)_{\Gamma_I}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

2. On multiplie ensuite chaque membre de la deuxième équation du système de Stokes (1.1) par une fonction test q_s puis intégrons sur Ω_s :

$$-(q_s, \operatorname{div} \mathbf{u}_s)_{\Omega_s} = -(g_s, q_s)_{\Omega_s}. \quad (2.126)$$

On pose :

$$\begin{cases} a_1(\mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s) &:= 2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}_s), \mathbb{D}(\mathbf{v}_s))_{\Omega_s} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{k_j}}{\alpha_1} (\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j)_{\Gamma_I}, \\ b_1(\mathbf{v}_s, q_s) &:= - (q_s, \operatorname{div} \mathbf{v}_s)_{\Omega_s}. \end{cases} \quad (2.127)$$

L'égalité (2.126) entraîne que $b_1(\mathbf{u}_s, q_s) = -(g_s, q_s)_{\Omega_s}$. Ainsi, on a pour tout \mathbf{v}_s et pour tout q_s :

$$\begin{cases} a_1(\mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s) + b_1(\mathbf{v}_s, p_s) + (p_d, \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_s)_{\Gamma_I} &= (\mathbf{f}_s, \mathbf{v}_s)_{\Omega_s}, \\ b_1(\mathbf{u}_s, q_s) &= -(g_s, q_s)_{\Omega_s}. \end{cases} \quad (2.128)$$

3. Multiplions maintenant chaque membre de la première équation du système de Darcy (1.3) par une fonction test \mathbf{v}_d puis intégrons sur Ω_d . On a formellement :

$$(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_d)_{\Omega_d} = (p_d, \operatorname{div} \mathbf{v}_d)_{\Omega_d} + (\mathbf{f}_d, \mathbf{v}_d)_{\Omega_d} - (p_d, \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}_d)_{\partial\Omega_d}. \quad (2.129)$$

Sous la condition $\mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}_d = 0$ sur Γ_d , on obtient à partir de (2.129) :

$$(\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_d)_{\Omega_d} = (p_d, \operatorname{div} \mathbf{v}_d)_{\Omega_d} + (\mathbf{f}_d, \mathbf{v}_d)_{\Omega_d} - (p_d, \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}_d)_{\Gamma_I} \quad (2.130)$$

4. Enfin, multiplions chaque membre de la deuxième équation du système de Darcy (1.3) par une fonction test q_d puis intégrons sur Ω_d :

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}_d, q_d)_{\Omega_d} = (g_d, q_d)_{\Omega_d}. \quad (2.131)$$

On pose :

$$\begin{cases} a_2(\mathbf{u}_d, \mathbf{v}_d) &:= (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_d)_{\Omega_d}, \\ b_2(q_d, \mathbf{v}_d) &:= -(q_d, \operatorname{div} \mathbf{v}_d)_{\Omega_d}. \end{cases} \quad (2.132)$$

Ainsi, (2.130) et (2.132) donnent :

$$\begin{cases} a_2(\mathbf{u}_d, \mathbf{v}_d) + b_2(p_d, \mathbf{v}_d) + (p_d, \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}_d)_{\Gamma_I} &= (\mathbf{f}_d, \mathbf{v}_d)_{\Omega_d}, \\ b_2(q_d, \mathbf{u}_d) &= -(g_d, q_d)_{\Omega_d}. \end{cases} \quad (2.133)$$

On introduit maintenant l'inconnue $\lambda = p_d$ sur Γ_I , puis on définit les formes linéaires et les formes bilinéaires suivantes :

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := a_1(\mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s) + a_2(\mathbf{u}_d, \mathbf{v}_d), \quad (2.134)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{v}, q) := b_1(\mathbf{v}_s, q_s) + b_2(\mathbf{v}_d, q_d), \quad (2.135)$$

$$b_I(\mathbf{v}, \lambda) := (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}_d, \lambda)_{\Gamma_I}, \quad (2.136)$$

$$L(\mathbf{v}) := (\mathbf{f}_s, \mathbf{v}_s)_{\Omega_s} + (\mathbf{f}_d, \mathbf{v}_d)_{\Omega_d}, \quad (2.137)$$

$$G(q) := -(g_s, q_s)_{\Omega_s} - (g_d, q_d)_{\Omega_d}. \quad (2.138)$$

Ainsi, les systèmes (2.128) et (2.133) impliquent par sommation membre à membre :

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, p) + b_I(\mathbf{v}, \lambda) &= L(\mathbf{v}), \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, q) &= G(q). \end{cases} \quad (2.139)$$

La formulation faible (2.139) est une formulation faible avec un mutiplicateur de Lagrange λ . Pour annuler cette inconnue λ , il suffit que la forme $b_I(\mathbf{v}, \lambda)$ soit nulle. Pour cela, on pose :

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_s & \text{dans } \Omega_s \\ \mathbf{u}_d & \text{dans } \Omega_d \end{cases} \quad \text{et} \quad p = \begin{cases} p_s & \text{dans } \Omega_s \\ p_d & \text{dans } \Omega_d \end{cases}, \quad (2.140)$$

où \mathbf{u}_l est la restriction de \mathbf{u} à Ω_l et p_l est la restriction de p à Ω_l . Les fonctions tests \mathbf{v} et q satisfont aussi (2.140). Alors, les formes (2.134) à (2.138) peuvent s'écrire :

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{v}, q) = b_1(\mathbf{v}, q) + b_2(\mathbf{v}, q),$$

$$L(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega_s} + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega_d}$$

$$G(q) = -(g, q)_{\Omega_s} - (g, q)_{\Omega_d},$$

$$b_I(\mathbf{v}, \lambda) := (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}_d, \lambda)_{\Gamma_I}.$$

On introduit ensuite les espaces fonctionnels suivant :

$$\mathbf{H} := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) : \mathbf{v}_s \in [H^1(\Omega_s)]^N, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_d = 0 \text{ sur } \Gamma_d \}, \quad (2.141)$$

muni de la norme :

$$\| \mathbf{v} \|_{\mathbf{H}} := (|\mathbf{v}|_{1,s}^2 + \| \mathbf{v} \|_d^2 + \| \text{div } \mathbf{v} \|_d^2)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \quad (2.142)$$

et

$$Q = L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \right\}, \quad (2.143)$$

muni de la norme L^2 :

$$\| q \| := \left(\int_{\Omega} |q(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \forall q \in Q. \quad (2.144)$$

Dans l'espace \mathbf{H} , $\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_s$ sur Γ_I et alors $\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}_d = \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_d$ sur Γ_I . De plus $\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_d = \mathbf{v}_s \cdot (\mathbf{n}_s + \mathbf{n}_d) = 0$ sur Γ_I . Nous avons donc $b_I(\mathbf{v}, \lambda) = 0$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Ainsi, le système (2.139) implique :

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, p) &= L(\mathbf{v}), \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, q) &= G(q). \end{cases} \quad (2.145)$$

Une formulation faible (sans mutiplicateurs de Lagrange) associé au problème couplé Stokes-Darcy s'écrit donc : trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H} \times Q$ tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, p) &= L(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H} \quad , \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, q) &= G(q) & \forall q \in Q \quad . \end{cases} \quad (2.146)$$

• Existence et l'unicité d'une solution faible.

Les formes linéaires et bilinéaires \mathbf{a} , \mathbf{b} , L et G satisfont les hypothèses du théorème de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi dès que la donnée $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^N$ et $g \in L_0^2(\Omega)$ (cf. [117, Section 3]). On a donc le résultat suivant :

Théorème 2.43. ([117, Section 3]) Si $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^N$ et $g \in L_0^2(\Omega)$, alors le problème faible (2.146) admet une solution et une seule dans $\mathbf{H} \times Q$.

Remarque 2.44. Une formulation faible avec un multiplicateur de Lagrange λ appartenant à l'espace d'interpolation $H_{00}^{1/2}(\Gamma_I)$ a été proposée dans [117]. On peut aussi se référer à [65] pour une formulation faible avec deux mutiplicateurs de Lagrange sur l'interface.

Remarque 2.45. L'inégalité de Korn classique (2.118) permet de montrer la coercivité de la forme bilinéaire \mathbf{a} sur \mathbf{Z} dans la norme $\| \cdot \|_{\mathbf{H}}$.

2.8 Conclusion

Nous avons rassemblé les notions et les résultats que nous avons utilisés fréquemment tout au long de ce travail. Nous avons donné de brèves définitions de quelques espaces fonctionnels, notamment, les espaces de Sobolev et quelques espaces particuliers. Nous avons ensuite rappelé la définition des différentes triangulations utilisées, c'est-à-dire, les triangulations conforme, isotrope et anisotrope. Nous avons donné de brèves descriptions des éléments finis de Crouzeix-Raviart et de Nédélec. L'inégalité de Korn classique a été aussi mentionnée (cf. Section 2.6). Nous avons rappelé les outils d'analyse : les opérateurs d'interpolation de Clément, les fonctions bulles, opérateurs d'extensions, inégalités inverses et de trace, les formules de Green. Enfin, nous avons présenté une formulation faible sans mutiplicateurs de Lagrange sur l'interface.

Analyse d'erreur a-posteriori d'une méthode d'éléments finis mixtes non-conforme sur une discrétisation isotrope

Sommaire

3.1 Introduction	71
3.2 Approximation par éléments finis non-conformes isotropes	72
3.3 Estimation d'erreur a-priori	87
3.4 Quelques résultats techniques	91
3.5 Analyse d'erreur a-posteriori	105
3.6 Conclusion	122

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons une analyse d'erreur a-posteriori de type résiduel sur une discrétisation isotrope. Nous approchons la vitesse du fluide dans Ω en utilisant une variante de la méthode d'éléments finis $[\mathbb{P}^1]^N$ non-conformes de Crouzeix-Raviart. La pression du fluide dans Ω est approchée dans l'espace des fonctions constantes par morceaux. Nous établissons l'inégalité de Korn discrète sur une discrétisation isotrope dans la sous-section 3.2.2. Nous utilisons cette inégalité pour justifier la stabilité du problème discret (cf. sous-section 3.2.3). Un résultat d'estimation d'erreur a-priori optimal est présenté dans la sous-section 3.3. Nous faisons dans la section 3.5, une analyse d'erreur a-posteriori. La différence entre les résultats de ce chapitre et les résultats des

papers [15, 46, 54, 65] est que la discrétisation est non-conforme dans le domaine tout entier. Comme conséquence, des termes additionnels sont inclus dans les indicateurs d'erreur a-posteriori qui mesurent la non-conformité de la méthode. Afin de traiter de façon appropriée cette non-conformité, nous avons besoin de quelques résultats techniques (cf. Section 3.4). Nous établissons dans la sous-section 3.4.1, un résultat de décomposition de Helmholtz spécial des éléments de l'espace vitesse considéré [7]. En effet, la vitesse du fluide dans Ω_d est seulement $H(\mathbf{div})$ et l'opérateur d'interpolation de Clément est défini pour les fonctions appartenant à l'espace de Sobolev $[H^1(\Omega_d)]^N$. Dans la sous-section 3.4.2, nous établissons un résultat de régularité de la vitesse du fluide dans Ω_d [7]. La raison est que, nous avons besoin dans les estimations d'erreur a posteriori, la trace de la vitesse du fluide dans Ω_d (la vitesse du fluide dans Ω_d étant seulement $H(\mathbf{div})$). Dans la sous-section 3.4.3, nous construisons un opérateur d'interpolation de Oswald adapté qui préserve la continuité de la vitesse du fluide à travers l'interface [7]. Nous construisons ainsi une famille optimale d'indicateurs d'erreur a-posteriori [7]. Ces indicateurs d'erreur sont de type résiduel et ils sont définis dans la sous-section 3.5.1. En outre, nous démontrons la fiabilité des indicateurs dans la sous-section 3.5.2 tandis que la propriété d'efficacité est démontrée dans la sous-section 3.5.3.

3.2 Approximation par éléments finis non-conformes isotropes

Nous rappelons la formulation faible (2.146) de la section 2.7 : trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H} \times Q$ tels que,

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, p) &= L(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H} \quad , \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, q) &= G(q) & \forall q \in Q \quad , \end{cases} \quad (3.1)$$

où

$$\mathbf{H} := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega) : \mathbf{v}_s \in [H^1(\Omega_s)]^N, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_d = 0 \text{ sur } \Gamma_d \} ,$$

$$Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \right\} \text{ et}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}))_{\Omega_s} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} \langle \mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_I} + \mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_d} ,$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{v}, q) := - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

3.2.1 Problème discret

Nous discrétisons maintenant le problème variationnel (3.1). Nous commençons par définir les espaces d'approximations et les formes bilinéaires associées.

• **Les espaces d'approximations :** L'espace d'approximation pour les vitesses est défini via les éléments finis $[\mathbb{P}^1]^N$ non-conformes de Crouzeix-Raviart,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_h := \{ \mathbf{v}_h : \mathbf{v}_h|_T \in [\mathbb{P}^1(T)]^N \ \forall T \in \mathcal{T}_h, ([\mathbf{v}_h]_E, 1)_E = 0 \ \forall E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+) , \\ ([\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_E]_E, 1)_E = 0 \ \forall E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d) \cup \mathcal{E}_h(\partial\Omega_d) \} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

L'espace d'approximation pour les pressions est défini par :

$$Q_h := \{ q_h \in L_0^2(\Omega) : q_h|_T \in \mathbb{P}^0(T) \ \forall T \in \mathcal{T}_h \} . \quad (3.3)$$

• **Les formes bilinéaires approchées :** Comme $\mathbf{H}_h \not\subseteq \mathbf{H}$, alors nous définissons les formes bilinéaires approchées \mathbf{a}_h et \mathbf{b}_h par :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= 2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} (\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}))_T + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{K_j}} \langle \mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_I} \\ &+ \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_d}, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H} + \mathbf{H}_h, \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{b}_h(\mathbf{v}, q) := - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (q, \operatorname{div} \mathbf{v})_T, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H} + \mathbf{H}_h, \forall q \in Q_h.$$

• **Le problème approché :** Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{H}_h \times Q_h$ tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, p_h) + \mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= L(\mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h, \\ \mathbf{b}_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= G(q_h), \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (3.4)$$

Le problème discret (3.4) est une discrétisation naturelle du problème faible (3.1) sauf qu'il y a un terme de pénalisation $\mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ qui s'ajoute. Cette forme bilinéaire $\mathbf{J}^{\text{iso}}(., .)$ est définie par décomposition suivant les éléments de \mathcal{E}_h :

$$\mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{iso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{J}_{\Omega_d}^{\text{iso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{J}_{\partial\Omega_d}^{\text{iso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (3.5)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{iso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= (1 + 2\mu) \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+)} \frac{1}{\text{diam}(E)} \int_E [\mathbf{u}]_E \cdot [\mathbf{v}]_E ds, \\ \mathbf{J}_{\Omega_d}^{\text{iso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} \frac{1}{\text{diam}(E)} \int_E [\mathbf{u}]_E \cdot [\mathbf{v}]_E ds \quad \text{et}, \\ \mathbf{J}_{\partial\Omega_d}^{\text{iso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega_d)} \frac{1}{\text{diam}(E)} \int_E [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_E]_E \times [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_E]_E ds. \end{aligned}$$

Si l'on pose $A_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, alors le problème discret (3.4) est équivalent à :

$$\begin{cases} A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= L(\mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h, \\ \mathbf{b}_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= G(q_h), \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (3.6)$$

Remarque 3.1. Notons que le choix de l'espace d'approximation \mathbf{H}_h respecte bien la régularité de \mathbf{u} dans Ω_d . Ce choix est donc plus naturel que celui introduit dans [98]. Notons également que $\mathbf{a}_h = \mathbf{a}$ sur $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ et $\mathbf{b}_h = \mathbf{b}$ sur $\mathbf{H} \times Q$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir une norme sur \mathbf{H}_h [98]. On pose :

$$\|\mathbf{v}\|_h := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} |\mathbf{v}|_{1,T}^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \|\mathbf{v}_s \cdot \tau_j\|_{\Gamma_I}^2 + \|\mathbf{v}\|_{\Omega_d}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \|\text{div } \mathbf{v}\|_T^2 + \mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \right)^{1/2}.$$

On introduit le lemme suivant :

Lemme 3.2. (cf. [7]) L'application $\|\cdot\|_h: \mathbf{v} \in \mathbf{H}_h \mapsto \|\mathbf{v}\|_h \in \mathbb{R}_+$ est une norme sur \mathbf{H}_h .

Preuve. Les propriétés d'homogénéité et d'inégalité triangulaire son triviales.

Soit maintenant $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h$ tel que $\|\mathbf{v}\|_h = 0$. Alors

$$\begin{cases} |\mathbf{v}|_{1,T} &= 0 & \forall T \in \mathcal{T}_h^s, \\ \langle \gamma_s(\mathbf{v}_s) \cdot \tau_j, \gamma_s(\mathbf{v}_s) \cdot \tau_j \rangle_{\Gamma_I} &= 0 & \forall j = 1, \dots, N-1, \\ \|\mathbf{v}\|_{\Omega_d} &= 0, \\ \|\text{div } \mathbf{v}\|_T &= 0 & \forall T \in \mathcal{T}_h^d, \\ \mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Ce qui implique que :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} & = & 0 \quad \text{sur chaque } T \in \mathcal{T}_h^s \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad , \\ \gamma_s(\mathbf{v}_s) \cdot \tau_j & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_I \quad \forall j = 1, \dots, N-1 \quad , \\ \mathbf{v} & = & \mathbf{0} \quad \text{presque partout dans } \Omega_d \quad , \\ \int_E [\mathbf{v}]_E^2 & = & \mathbf{0} \quad \forall E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+) \cup \mathcal{E}_h(\Omega_d) \quad , \\ \int_E [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_E]_E^2 & = & 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega_d) \quad . \end{array} \right. \quad (3.8)$$

L'égalité (3.8)₁ implique que \mathbf{v} est une constante vectorielle C_T^s pour tout $T \in \mathcal{T}_h^s$.

Ainsi les conditions (3.8)₁ et (3.8)₄ impliquent en particulier le système :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{v} & = & C_T^s \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^s \quad , \\ |E|C_T^s & = & \mathbf{0} \quad \forall E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s \cap T) \quad , \\ |E|\{C_T^s - C_{T'}^s\} & = & \mathbf{0} \quad \forall E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s)/\partial T \cap \partial T' = E \quad . \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Comme $|E| \neq 0$, alors les égalités (3.9)₃ et (3.9)₂ impliquent respectivement que le vecteur constant C_T^s est la même sur chaque T et est nulle dans chaque $T \in \mathcal{T}_h^s$. D'où $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dans Ω_s .

Les égalités (3.8)₂ et (3.8)₅ impliquent le système :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \gamma_s(\mathbf{v}_s) \cdot \tau_j & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_I \quad , \quad \forall j = 1, \dots, N-1 \quad , \\ \gamma_s(\mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n} & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_I. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Le système (3.10) implique que $\gamma_s(\mathbf{v}_s)$ est nulle sur Γ_I . En conclusion, on a,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{v} & = & \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_s, \\ \mathbf{v} & = & \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_d, \\ \gamma_s(\mathbf{v}_s) & = & \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_I. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Ainsi, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dans Ω et le lemme est complètement démontré. ■

Nous donnons à présent la relation d'orthogonalité de Galerkin qui joue un rôle important dans la majoration d'erreur a-posteriori.

Lemme 3.3. (Orthogonalité au sens de Galerkin [7]) *L'erreur $(\mathbf{e}, \varepsilon)$ satisfait la relation d'orthogonalité suivante :*

$$2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} (\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{v}))_T + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} \langle \mathbf{e}_s \cdot \tau_j, \mathbf{v}_s \cdot \tau_j \rangle_{\Gamma_I} + \mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{v})_{\Omega_d} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\varepsilon, \text{div} \mathbf{v})_T$$

$$- \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (q, \operatorname{div} \mathbf{e})_T - \mathbf{J}^{iso}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H} \cap \mathbf{H}_h, \forall q \in Q_h,$$

Preuve. La preuve est immédiate : il suffit de soustraire (3.4) de (2.146). ■

3.2.2 Inégalité de Korn discrète sur une discrétisation isotrope

Pour démontrer la coercivité de la forme bilinéaire A_h dans la norme $\|\cdot\|_h$, nous avons besoin de l'inégalité de Korn discrète. En effet, pour les méthodes d'approximations H^1 non-conformes, l'inégalité de Korn classique est inadéquate.

Rappelons le résultat suivant énoncé dans la sous-section 2.6.

Lemme 3.4. ([35]) *Soit ϕ une semi-norme satisfaisant les conditions (2.110) et (2.111) ci-dessus (cf. sous-section 2.6). Alors l'inégalité de Korn classique (2.106) implique l'inégalité :*

$$|\mathbf{v}|_{1,K} \leq C_K (\|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_K + \phi(\mathbf{v})), \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^N. \quad (3.12)$$

L'objectif de la présente sous-section, est de démontrer l'analogue de (3.12) pour les fonctions vectorielles affines par morceaux et $[H^1]^N$ par morceaux. Nous considérons une discrétisation isotrope.

Soit \mathcal{T}_h une triangulation sur \overline{K} . Nous introduisons les espaces discrets suivants :

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{T}_h} &:= \{ \mathbf{v} \in [L^2(K)]^N : \mathbf{v}|_T = \mathbf{v}_T \in [\mathbb{P}^1(T)]^N, \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \\ W_{\mathcal{T}_h} &:= \{ \mathbf{w} \in [H^1(K)]^N : \mathbf{w}|_T = \mathbf{w}_T \in [\mathbb{P}^1(T)]^N, \forall T \in \mathcal{T}_h \} := [H(K, \mathcal{T}_h)]^N. \end{aligned}$$

Pour $\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}_h}$, on pose :

$$F\mathbf{v}(s) := \frac{1}{|\chi_s|} \sum_{T \in \chi_s} \mathbf{v}_T(s), \quad \forall s \in \mathcal{N}_h(K), \quad (3.13)$$

où χ_s est l'ensemble des éléments du maillage ayant s comme sommet.

Lemme 3.5. ([35]) *Si la triangulation \mathcal{T}_h sur \overline{K} satisfait l'Hypothèse 2.21, alors la fonction F est bien définie de $V_{\mathcal{T}_h}$ dans $W_{\mathcal{T}_h}$.*

Preuve. Considérons $\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}_h}$ puis posons $\mathbf{w} = F\mathbf{v}$. Montrons que \mathbf{w} existe et est unique dans $W_{\mathcal{T}_h}$. Par (3.13), \mathbf{w}_T existe et est bien unique dans $[\mathbb{P}^1(T)]^N$ puisque $\mathbf{w}_T(s)$ est bien connu en chaque sommet $s \in \mathcal{N}(T)$.

Il reste maintenant à montrer la continuité de \mathbf{w} à travers les interfaces du maillage.

Soient donc T_1 et T_2 deux éléments du maillage partageant une arête/face interne E (l'Hypothèse 2.21 étant satisfaite). Alors $\mathbf{w}_{T_1}(s_i) = \mathbf{w}_{T_2}(s_i)$, $i = 1, \dots, N$, où les s_i sont les sommets de E . D'où $\mathbf{w}_{T_1} = \mathbf{w}_{T_2}$ sur E . Ainsi grâce au théorème de recollement d'espace de Sobolev (i.e. Théorème 2.5), la fonction \mathbf{w} définie par :

$$\mathbf{w} := \begin{cases} \mathbf{w}_{T_1} & \text{sur } T_1, \\ \mathbf{w}_{T_2} & \text{sur } T_2, \end{cases} \quad (3.14)$$

appartient à $[H^1(T_1 \cup T_2)]^N$. De proche en proche, nous recouvrons K . ■

Le lemme suivant donne l'estimation de base pour l'opérateur F :

Lemme 3.6. (*[35, Lemme 2.1]*) Soit \mathcal{T}_h une triangulation sur \bar{K} satisfaisant l'Hypothèse 2.21 et l'Hypothèse 2.23. Alors, l'opérateur F satisfait l'estimation :

$$|(\mathbf{v}_T - F\mathbf{v})(s)|_{\mathbb{R}^N}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_s} |[\mathbf{v}]_E(s)|_{\mathbb{R}^N}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}_h}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ et } \forall s \in \mathcal{N}(T), \quad (3.15)$$

où \mathcal{E}_s est l'ensemble de toutes les arêtes (ou faces) du maillage ayant s comme sommet.

Preuve. Soit $\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}_h}$, $T \in \mathcal{T}_h$ et $s \in \mathcal{N}(T)$. On a au vu de la définition (3.13) de l'opérateur F et du Lemme 3.5 (l'Hypothèse 2.21 étant satisfaite), les égalités :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_T - F\mathbf{v})(s) &= \mathbf{v}_T(s) - F\mathbf{v}(s) = \mathbf{v}_T(s) - \frac{1}{|\chi_s|} \sum_{T' \in \chi_s} \mathbf{v}_{T'}(s) \\ &= \frac{1}{|\chi_s|} \sum_{T' \in \chi_s} \mathbf{v}_T(s) - \frac{1}{|\chi_s|} \sum_{T' \in \chi_s} \mathbf{v}_{T'}(s) \\ &= \frac{1}{|\chi_s|} \sum_{T' \in \chi_s} (\mathbf{v}_T(s) - \mathbf{v}_{T'}(s)). \end{aligned}$$

Si $T' \in \chi_s$, alors grâce à l'Hypothèse 2.23, il existe un nombre fini de mailles T_1, \dots, T_m dans χ_s telles que : $T_1 = T$, $T_m = T'$ et $\partial T_j \cap \partial T_{j+1} = E_j$, pour tous $j = 1, \dots, m-1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_T(s) - \mathbf{v}_{T'}(s) &= \mathbf{v}_{T_1}(s) - \mathbf{v}_{T_m}(s) \\ &= (\mathbf{v}_{T_1}(s) - \mathbf{v}_{T_2}(s)) + (\mathbf{v}_{T_2}(s) - \mathbf{v}_{T_3}(s)) \\ &+ \dots + (\mathbf{v}_{T_j}(s) - \mathbf{v}_{T_{j+1}}(s)) + \mathbf{v}_{T_{m-1}}(s) - \mathbf{v}_{T_m}(s). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_T(s) - \mathbf{v}_{T'}(s)|_{\mathbb{R}^N}^2 &= \left| \sum_{j=1}^{m-1} \mathbf{v}_{T_j}(s) - \mathbf{v}_{T_{j+1}}(s) \right|_{\mathbb{R}^N}^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{m-1} |\mathbf{v}_{T_j}(s) - \mathbf{v}_{T_{j+1}}(s)|_{\mathbb{R}^N}^2, \end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_T(s) - \mathbf{v}_{T'}(s)|_{\mathbb{R}^N}^2 &\leq \sum_{j=1}^{m-1} |[\mathbf{v}]_{E_j}(s)|_{\mathbb{R}^N}^2 \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_s} |[\mathbf{v}]_E(s)|_{\mathbb{R}^N}^2. \end{aligned}$$

Finalement, l'estimation (3.15) du lemme tient grâce à l'Hypothèse 2.23. ■

Nous pouvons maintenant prouver l'inégalité de Korn discrète pour les fonctions dans $V_{\mathcal{T}_h}$ sur une discrétisation isotrope [35].

Lemme 3.7. ([35, Lemme 2.2]) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, une famille régulière de triangulations sur \bar{K} satisfaisant l'Hypothèse 2.21 et l'Hypothèse 2.23 et, telle que $h_T \sim \text{diam}(E)$, $\forall T \in \chi_s$, $\forall E \in \mathcal{E}_s$ et $s \in \mathcal{N}(\bar{K})$; soit $\phi : [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme telle que les conditions (2.110) et (2.111) soient satisfaites. On suppose, de plus que,

$$|\phi(\mathbf{v} - F\mathbf{v})|^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{K})} \text{diam}(E)^{N-2} \sum_{s \in \mathcal{N}(E)} |[\mathbf{v}]_E(s)|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (3.16)$$

Alors, on a l'estimation suivante :

$$|\mathbf{v}|_{[H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N}^2 \lesssim \|\mathbb{D}_{\mathcal{T}_h}(\mathbf{v})\|_K^2 + |\phi(\mathbf{v})|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{K})} \text{diam}(E)^{N-2} \sum_{s \in \mathcal{N}(E)} |[\mathbf{v}]_E(s)|_{\mathbb{R}^N}^2 \quad (3.17)$$

$\forall \mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}_h},$

où

$$|\mathbf{v}|_{[H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N} := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{v}|_{1,T}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.18)$$

Preuve. Soit $\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}_h}$. On a en utilisant l'inégalité (2.113) et la définition de ϕ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2 &\leq |\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2 + |F\mathbf{v}|_{H^1(K)}^2 \\ &\lesssim \|\mathbb{D}(F\mathbf{v})\|_K^2 + (\phi(F\mathbf{v}))^2 + |\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2 \\ &\lesssim \|\mathbb{D}_{\mathcal{T}_h}(\mathbf{v})\|_K^2 + (\phi(\mathbf{v}))^2 + (\phi(\mathbf{v} - F\mathbf{v}))^2 + |\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2. \end{aligned}$$

Grâce à la condition (3.16), on a :

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2 &\leq \|\mathbb{D}_{\mathcal{T}_h}(\mathbf{v})\|_K^2 + (\phi(\mathbf{v}))^2 + \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{K})} \text{diam}(E)^{N-2} \sum_{s \in \mathcal{N}(E)} |[\mathbf{v}]_E(s)|^2 + |\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2. \end{aligned}$$

Il reste maintenant à estimer le terme $|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2$. En utilisant les inégalités inverses standard [48, 89], on a :

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \lesssim \|J_T^{-1}\|_{\mathbb{R}^{N \times N}}^2 \times |\det(J_T)| \times |\overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}}|_{1,\bar{T}}^2, \text{ et} \quad (3.19)$$

$$|\det(J_T)| = \frac{|T|}{|\bar{T}|}. \quad (3.20)$$

Donc,

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \lesssim \|J_T^{-1}\|_{\mathbb{R}^{N \times N}}^2 \times |T| \times |\overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}}|_{1,\bar{T}}^2. \quad (3.21)$$

Rappelons que [48, 89] :

$$\|J_T^{-1}\|_{\mathbb{R}^{N \times N}} \leq \frac{\bar{h}}{\rho_T}. \quad (3.22)$$

Ainsi,

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \lesssim \frac{|T|}{\rho_T^2} \times |\overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}}|_{1,\bar{T}}^2. \quad (3.23)$$

Nous distinguons ici deux cas :

- **Cas 1** (Dimension $N = 2$). On a, $|T| = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} \lesssim h_T^2$ et donc,

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \lesssim \left(\frac{h_T}{\rho_T}\right)^2 \times |\overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}}|_{1,\bar{T}}^2. \quad (3.24)$$

Comme $\mathbf{v}_T - F\mathbf{v} \in [\mathbb{P}^1(T)]^N$, donc l'équivalence des normes dans les espaces de di-

mension finie entraîne :

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \lesssim \left(\frac{h_T}{\rho_T}\right)^2 \times \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} |(\mathbf{v}_T - F\mathbf{v})(s)|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (3.25)$$

• **Cas 2** (Dimension $N = 3$). On a, $|T| = \frac{\text{aire de base} \times \text{hauteur}}{3} \leq \frac{h_T^3}{3}$ et donc,

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \lesssim h_T \times \left(\frac{h_T}{\rho_T}\right)^2 \times \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} |(\mathbf{v}_T - F\mathbf{v})(s)|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (3.26)$$

Nous pouvons donc écrire en dimension $N = 2$ ou 3 , l'estimation :

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \lesssim (h_T)^{N-2} \times (\sigma_T)^2 \times \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} |(\mathbf{v}_T - F\mathbf{v})(s)|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (3.27)$$

Nous voyons clairement que le second membre de l'inégalité (3.27) fait intervenir l'aplatissement de T . Ainsi, sous l'hypothèse de régularité du maillage (Définition 2.12), l'inégalité (3.27) devient :

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \leq C(\sigma_0)(h_T)^{N-2} \times \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} |(\mathbf{v}_T - F\mathbf{v})(s)|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (3.28)$$

De l'hypothèse : $h_T \sim \text{diam}(E)$, $\forall T \in \chi_s$, $\forall E \in \mathcal{E}_s$ et $s \in \mathcal{N}(\bar{K})$, l'inégalité (3.28) conduit à l'estimé (3.29) :

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \leq C(\sigma_0) \times (\text{diam}(E))^{N-2} \times \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} |(\mathbf{v}_T - F\mathbf{v})(s)|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (3.29)$$

Le lemme est donc complètement démontré. ■

Nous définissons maintenant sur chaque $T \in \mathcal{T}_h$, un opérateur d'interpolation Π_T de $[H^1(T)]^N$ dans $\mathbf{RM}(T)$ (l'espace des mouvements rigides restreint à T) par les conditions suivantes :

$$\left| \int_T (\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}) \right|_{\mathbb{R}^N} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(T)]^N, \quad (3.30)$$

$$\left| \int_T \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}) \right|_{\mathbb{R}^N} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(T)]^N, \quad (3.31)$$

où l'on rappelle que :

$$\left| \int_T \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}) \right|_{\mathbb{R}^N} = \begin{cases} \left| \int_T \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}) \right|_{\mathbb{R}^3} & \text{si } N = 3, \\ \left| \int_T \mathbf{rot}(\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}) \right| & \text{si } N = 2. \end{cases} \quad (3.32)$$

Ces conditions déterminent Π_T parce qu'on a [35] :

$$\left(\mathbf{m} \in \mathbf{RM}(T) \text{ et } \left| \int_T \mathbf{m} dx \right|_{\mathbb{R}^N} = \left| \int_T \mathbf{rot}(\mathbf{m}) dx \right|_{\mathbb{R}^N} = 0 \right) \iff \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (3.33)$$

Lemme 3.8. ([35, Section 3]) *L'opérateur Π_T satisfait les estimations :*

$$\| \nabla(\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}) \|_T \lesssim \| \mathbb{D}(\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}) \|_T = \| \mathbb{D}(\mathbf{v}) \|_T, \quad (3.34)$$

$$\| \mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v} \|_T \lesssim h_T \| \nabla(\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}) \|_T. \quad (3.35)$$

Soit $\Pi : [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N \longrightarrow V_{\mathcal{T}_h}$, l'application de $[H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N$ dans l'espace des champs de vecteurs affines par morceaux $V_{\mathcal{T}_h}$ défini par :

$$(\Pi \mathbf{v})|_T := \Pi_T \mathbf{v}_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (3.36)$$

Nous pouvons à présent énoncer l'inégalité de Korn discrète pour les fonctions dans $[H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N$ sur une discrétisation isotrope [35, Théorème 3.1].

Théorème 3.9. ([35, Théorème 3.1]) *Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur \bar{K} satisfaisant les Hypothèses 2.21 et 2.23 et, telle que $h_T \sim \text{diam}(E)$, $\forall T \in \chi_s$, $\forall E \in \mathcal{E}_s$ et $s \in \mathcal{N}(\bar{K})$; soit $\phi : [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme telle que les conditions (2.110), (2.111) et (3.16) soient satisfaites et, en plus, la condition :*

$$\phi(\mathbf{v} - \Pi \mathbf{v}) \lesssim \| \mathbb{D}_{\mathcal{T}_h}(\mathbf{v}) \|_K, \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N, \quad (3.37)$$

où $\Pi : [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N \longrightarrow V_{\mathcal{T}_h}$ est défini par (3.36). Alors, nous avons l'estimation suivante pour tout $\mathbf{v} \in [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N$:

$$|\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2 \lesssim \left(\| \mathbb{D}_{\mathcal{T}_h}(\mathbf{v}) \|_K^2 + (\phi(\mathbf{v}))^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\bar{K})} (\text{diam}(E))^{-1} \| \Pi_E[\mathbf{v}]_E \|_E^2 \right), \quad (3.38)$$

avec Π_E , la projection orthogonale de $[L^2(E)]^N$ dans $[\mathbb{P}^1(E)]^N$.

On pourra se référer à [35] pour des exemples de semi-normes ϕ satisfaisant les conditions (2.110), (2.111), (3.16) et (3.37).

3.2.3 Existence et l'unicité d'une solution du problème discret

Nous pouvons maintenant prouver l'existence et l'unicité d'une solution du problème discret (3.6).

Continuité des formes discrètes

Lemme 3.10. ([98]) *Les estimations suivantes tiennent :*

$$|L(\mathbf{v}_h)| \lesssim \|\mathbf{v}_h\|_h, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h + \mathbf{H}, \quad (3.39)$$

$$|G(q_h)| \lesssim \|q_h\|, \quad \forall q_h \in Q_h, \quad (3.40)$$

$$|A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| \lesssim \|\mathbf{u}_h\|_h \times \|\mathbf{v}_h\|_h, \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h + \mathbf{H}, \quad (3.41)$$

$$|\mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h)| \lesssim \|\mathbf{v}_h\|_h \times \|q_h\|, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h + \mathbf{H}, \forall q_h \in Q_h. \quad (3.42)$$

Preuve. Ces estimations suivent immédiatement l'inégalité de Hölder. ■

Coercivité de la forme bilinéaire A_h

Nous introduisons ici l'espace discret :

$$\mathbf{Z}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h : \mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \forall q_h \in Q_h\}. \quad (3.43)$$

Lemme 3.11. ([7]) *Si $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$, alors $\operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0$ pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$.*

Preuve. Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$. Alors par définition de l'espace \mathbf{H}_h , $\mathbf{v}_{h|T} \in [\mathbb{P}^1(T)]^N$, et donc, $\operatorname{div}(\mathbf{v}_{h|T}) \in \mathbb{P}^0(T)$, $\forall T \in \mathcal{T}_h$. Posons $q_h = \operatorname{div} \mathbf{v}_h$ sur T . Comme $q_h \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ (Ω étant borné), il reste à prouver que $\int_{\Omega} q_h = 0$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} q_h \right| &= \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_h \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_h \right| \quad (\text{formule de divergence}) \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega)} \left| \int_E [\mathbf{n}_E \cdot \mathbf{v}_h]_E \right| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+)} \left| \int_E [\mathbf{n}_E \cdot \mathbf{v}_h]_E \right| + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} \left| \int_E [\mathbf{n}_E \cdot \mathbf{v}_h]_E \right| + \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega_d)} \left| \int_E [\mathbf{n}_E \cdot \mathbf{v}_h]_E \right| = 0. \end{aligned}$$

D'où, via les propriétés de l'espace discret \mathbf{H}_h , il en ressort que :

$$\int_{\Omega} q_h = 0. \quad (3.44)$$

Ainsi,
$$\mathbf{b}_h(q_h, \mathbf{v}_h) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_T^2 = 0.$$

Le lemme est donc démontré. ■

Nous montrons à présent la coercivité de la forme bilinéaire A_h sur \mathbf{Z}_h .

Lemme 3.12. (*[7] Coercivité discrète*) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant les Hypothèses 2.21 à 2.23. Alors la forme bilinéaire discrète A_h est elliptique sur \mathbf{Z}_h , c'est-à-dire vérifie l'estimation :

$$A_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \gtrsim \|\mathbf{v}_h\|_h^2, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h. \quad (3.45)$$

Preuve. Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$. On a :

$$\begin{aligned} A_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &= 2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\mathbb{D}(\mathbf{v}_h)\|_T^2 + \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega_d} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\kappa_j} \|\mathbf{v}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_j\|_{\Gamma_I}^2 \\ &\quad + \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{iso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{J}_{\Omega_d}^{\text{iso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{J}_{\partial\Omega_d}^{\text{iso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \end{aligned}$$

Considérons la semi-norme ϕ_3 définie par,

$$\phi_3(\mathbf{v}_h) = \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \int_T \mathbf{rot} \mathbf{v}_h \right|_{\mathbb{R}^N}, \quad (\text{ici } N = 1 \text{ ou } N = 3). \quad (3.46)$$

Rappelons que la semi-norme ϕ_3 satisfait les conditions (2.110), (2.111), (3.16) et (3.37) (cf. [35]). Rappelons également que le rotationnel $\mathbf{rot}(\mathbf{v}_h)$ de \mathbf{v}_h est une fonction scalaire constante ($N = 2$) et une fonction vectorielle constante ($N = 3$) sur chaque T . On a, en utilisant l'inégalité de Young (2.105) et la formule de Green (2.96) :

$$\begin{aligned} \phi_3(\mathbf{v}_h) &= \left| \int_{\Omega_s} \mathbf{rot} \mathbf{v}_h \right|_{\mathbb{R}^N} \\ &= \left| \int_{\partial\Omega_s} \gamma_{\tau}(\mathbf{v}_h) \right|_{\mathbb{R}^N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\Gamma_s} \gamma_\tau(\mathbf{v}_h) \right|_{\mathbb{R}^N} + \left| \int_{\Gamma_I} \gamma_\tau(\mathbf{v}_h) \right|_{\mathbb{R}^N} \\
&\lesssim \int_{\Gamma_s} |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N} + \int_{\Gamma_I} |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}.
\end{aligned}$$

- Estimons $\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}$ ($N = 1$ ou $N = 3$). On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N} &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \left\{ \left(\int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2} \times |\text{diam}(E)|^{1/2} \right\} \\
&\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \left\{ \text{diam}(E)^{-1/2} \times \left(\int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2} \times \text{diam}(E) \right\} \\
&\leq \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \text{diam}(E)^{-1} \int_E |[\mathbf{v}_h]_E|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2} \times \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \text{diam}(E)^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \text{diam}(E)^2 \right)^{1/2} \lesssim 1, \quad (3.47)$$

Donc,

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N} \lesssim \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \text{diam}(E)^{-1} \int_E |[\mathbf{v}_h]_E|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.48)$$

D'où,

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N} \lesssim \left(\mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{iso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \right)^{1/2}. \quad (3.49)$$

- Estimons maintenant $\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}$. On a par Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N} \leq \left(\int_{\Gamma_I} |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2} \times |\Gamma_I|^{1/2}$$

$$\lesssim \mathbf{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)^{1/2}.$$

Avec ces deux estimés, on a l'estimation :

$$(\phi_3(\mathbf{v}_h))^2 \lesssim \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{iso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \quad (3.50)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{iso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\mathbb{D}(\mathbf{v}_h)\|_T^2 &\gtrsim \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\mathbb{D}(\mathbf{v}_h)\|_T^2 + (\phi_3(\mathbf{v}_h))^2 + \\ &+ \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{iso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité de Korn discrète du Théorème 3.9 au second membre de cette inégalité pour avoir :

$$\mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{iso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\mathbb{D}(\mathbf{v}_h)\|_T^2 \gtrsim \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\nabla(\mathbf{v}_h)\|_T^2. \quad (3.51)$$

D'où,

$$\mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\mathbb{D}(\mathbf{v}_h)\|_T^2 \gtrsim \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\nabla(\mathbf{v}_h)\|_T^2 + \mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h),$$

soit,

$$A_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \gtrsim \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\nabla(\mathbf{v}_h)\|_T^2 + \mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \quad (3.52)$$

Par ailleurs,

$$A_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \sum_{j=1}^{N-1} \|\mathbf{v}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_j\|_{\Gamma_I}^2, \quad (3.53)$$

$$A_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \|\mathbf{v}_h\|_{\Omega_d}^2. \quad (3.54)$$

Les estimés (3.52), (3.53) et (3.54), et le Lemme 3.11 conduisent à l'estimé du lemme.

■

Condition inf-sup de la forme bilinéaire \mathbf{b}_h

Nous montrons ici la condition inf-sup de la forme bilinéaire \mathbf{b}_h sur $\mathbf{H}_h \times Q_h$. Mais avant, nous introduisons l'espace :

$$W := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H} : \mathbf{v}|_{\Omega_d} \in [H^1(\Omega_d)]^N \}. \quad (3.55)$$

Nous définissons ensuite l'opérateur d'interpolation de Crouzeix-Raviart

$r_h : W \longrightarrow \mathbf{H}_h$ par :

$$\int_E (r_h \mathbf{v})_s ds = \int_E \mathbf{v}_s ds, \forall E \in \mathcal{E}_h(\overline{\Omega}_s), \forall \mathbf{v} \in W, \quad (3.56)$$

$$\int_E (r_h \mathbf{v})_d ds = \int_E \mathbf{v}_d ds, \forall E \in \mathcal{E}_h(\overline{\Omega}_d), \forall \mathbf{v} \in W. \quad (3.57)$$

Lemme 3.13. ([98]) *L'opérateur d'interpolation r_h est borné, c'est-à-dire :*

$$\| r_h \mathbf{v} \|_h \lesssim (\| \mathbf{v} \|_{1,s}^2 + \| \mathbf{v} \|_{1,d}^2)^{1/2}, \forall \mathbf{v} \in W. \quad (3.58)$$

La constante dépend de σ_0 , μ et N .

Lemme 3.14. ([7] *Condition inf-sup discrète*) *Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$ satisfaisant les Hypothèses 2.21 et 2.22. Alors, la forme bilinéaire \mathbf{b}_h satisfait la condition inf-sup uniforme sur $\mathbf{H}_h \times Q_h$, c'est-à-dire :*

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h} \frac{\mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\| \mathbf{v}_h \|_h \times \| q_h \|} \gtrsim 1. \quad (3.59)$$

Preuve. On utilise l'argument de Fortin, i.e. pour tout $q_h \in Q_h$, nous allons associer un $\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h$ tel que :

$$\mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h) = \| q_h \|_{\Omega}^2 \text{ et } \| \mathbf{v}_h \|_h \lesssim \| q_h \|_{\Omega}.$$

Soit donc $q_h \in Q_h \subset Q$. Alors de [67, Corollaire 2.4, Page 24], il existe une fonction vectorielle $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^N$ telle que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} &= -q_h, \text{ dans } \Omega \\ \| \mathbf{v} \|_{1,\Omega} &\lesssim \| q_h \|_{\Omega}. \end{cases} \quad (3.60)$$

$[H_0^1(\Omega)]^N \subset W$, donc $\mathbf{v} \in W$. On prend $\mathbf{v}_h = r_h \mathbf{v} \in \mathbf{H}_h$ et on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_h(\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}, q_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q_h \operatorname{div} (\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}), \\
 &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} q_h \mathbf{n}_T \cdot (\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) \\
 &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+)} \int_E q_h \mathbf{n}_E \cdot (\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) \\
 &\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\overline{\Omega}_d)} \int_E q_h \mathbf{n}_E \cdot (\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) \\
 &= 0 \text{ (d'après les identités (3.56) et (3.57))}.
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbf{b}_h(\mathbf{v}, q_h) = \mathbf{b}_h(r_h \mathbf{v}, q_h).$$

Ainsi, en utilisant le système (3.60), on a :

$$\mathbf{b}_h(r_h \mathbf{v}, q_h) = - \int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \| q_h \|^2 \gtrsim \| \mathbf{v} \|_{1,\Omega} \times \| q_h \|. \quad (3.61)$$

Par ailleurs,

$$\| \mathbf{v}_h \|_h = \| r_h \mathbf{v} \|_h \lesssim \| \mathbf{v} \|_{1,\Omega}. \quad (3.62)$$

De (3.61) et (3.62), on déduit que :

$$\mathbf{b}_h(r_h \mathbf{v}, q_h) \gtrsim \| \mathbf{v}_h \|_h \times \| q_h \|, \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (3.63)$$

Et la condition inf-sup (3.59) suit. ■

Théorème 3.15. ([7]) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$ satisfaisant les Hypothèses 2.21 à 2.23. Alors, le problème discret (3.4) admet une solution et une seule dans $\mathbf{H}_h \times Q_h$.

Preuve. Le résultat découle directement des Lemmes 3.10, 3.12 et 3.14. ■

3.3 Estimation d'erreur a-priori

Lemme 3.16. (Strang [98]) Soit (\mathbf{u}, p) l'unique solution du problème faible (2.146). Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$ satisfaisant les Hypothèses

2.21 à 2.23. Soit (\mathbf{u}_h, p_h) l'unique solution du problème discret (3.4). Alors, on a l'estimation suivante :

$$\| \mathbf{e} \|_h + \| \varepsilon \| \lesssim \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h} \| \mathbf{u} - \mathbf{v}_h \|_h + \inf_{q_h \in Q_h} \| p - q_h \| + M_{1h} + M_{2h}. \quad (3.64)$$

où M_{1h} et M_{2h} sont des termes d'erreur de consistance définis par :

$$M_{1h} = \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h} \frac{|A_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, p) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega|}{\| \mathbf{v}_h \|_h}, \quad (3.65)$$

$$M_{2h} = \sup_{q_h \in Q_h} \frac{|\mathbf{b}_h(\mathbf{u}, q_h) + (g, q_h)_\Omega|}{\| q_h \|}. \quad (3.66)$$

Notons que $\mathbf{b}_h(\mathbf{u}, q_h) = \mathbf{b}(\mathbf{u}, q_h) = -(g, q_h)_\Omega$ et donc $M_{2h} = 0$.

Lemme 3.17. ([98] Estimation d'erreur d'interpolation) Soit (\mathbf{u}, p) l'unique solution du problème faible (2.146). Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant l'Hypothèse 2.21 et l'Hypothèse 2.22. On suppose que : $\mathbf{u}_s \in [H^2(\Omega_s)]^N$, $\mathbf{u}_d \in [H^2(\Omega_d)]^N$, $p_s \in H^1(\Omega_s)$ et $p_d \in H^1(\Omega_d)$. Alors,

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h} \| \mathbf{u} - \mathbf{v}_h \|_h \lesssim h (|\mathbf{u}|_{2,s} + |\mathbf{u}|_{2,d}), \quad (3.67)$$

$$\inf_{q_h \in Q_h} \| p - q_h \| \lesssim h (|p|_{1,s} + |p|_{1,d}). \quad (3.68)$$

Lemme 3.18. ([7] Consistance) On suppose que les hypothèses du Lemme 3.17 sont satisfaites. Alors, nous avons l'estimation suivante :

$$M_{1h} \lesssim h (|\mathbf{u}|_{2,s} + |p|_{1,s} + |p|_{1,d}). \quad (3.69)$$

Preuve. Considérons le terme $A_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, p) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega$. L'hypothèse de régularité de \mathbf{u} implique que $\mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = 0$ et donc $A_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = \mathbf{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$, $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h$. Ainsi, en intégrant par partie, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} -(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega &= -(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{\Omega_s} - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{\Omega_d} \\ &= (2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}) - \nabla p, \mathbf{v}_h)_{\Omega_s} - (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} + \nabla p, \mathbf{v}_h)_{\Omega_d} \\ &= 2\mu (\operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbf{v}_h)_{\Omega_s} - (\nabla p, \mathbf{v}_h)_{\Omega_s} - \mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)_{\Omega_d} - (\nabla p, \mathbf{v}_h)_{\Omega_d} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left\{ 2\mu (\operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbf{v}_h)_T - (\nabla p, \mathbf{v}_h)_T \right\} + \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left\{ \mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)_T - (\nabla p, \mathbf{v}_h)_T \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left\{ -2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}_h))_T + 2\mu (\mathbf{n}_T \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbf{v}_h)_{\partial T} + (p, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_T - (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_T, p)_{\partial T} \right\} \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left\{ -\mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)_T + (p, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_T - (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_T, p)_{\partial T} \right\} \\
&= - \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} 2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}_h))_T \right\} + \mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)_{\Omega_d} - (p, \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h)_\Omega \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left\{ 2\mu (\mathbf{n}_T \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbf{v}_h)_{\partial T} - (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_T, p)_{\partial T} \right\} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_T, p)_{\partial T} \\
&= -\mathbf{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_s \cdot \tau_j, \mathbf{v}_{h,s} \cdot \tau_j)_{\Gamma_I} - \mathbf{b}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \\
&+ 2\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+)} (\mathbf{n}_E \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}), [\mathbf{v}_h]_E)_E - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d) \cup \mathcal{E}_h(\partial \Omega_d)} ([\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_E]_E, p_d)_E \\
&- \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+)} ([\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_E, p_s]_E)_E.
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_s \cdot \tau_j, \mathbf{v}_{h,s} \cdot \tau_j)_{\Gamma_I}, \\
R_2 &= 2\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+)} (\mathbf{n}_E \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}), [\mathbf{v}_h]_E)_E, \\
R_3 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d) \cup \mathcal{E}_h(\partial \Omega_d)} ([\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_E]_E, p_d)_E, \\
R_4 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+)} ([\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_E, p_s]_E)_E.
\end{aligned}$$

Alors $A_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, p) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$. Il reste donc à majorer les termes R_i ($i = 1, \dots, 4$).

• Majoration de R_1 .

$$\begin{aligned}
|R_1| &\leq \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} \left(\int_{\Gamma_I} |\mathbf{u}_s \cdot \tau_j|^2 \right)^{1/2} \times \left(\int_{\Gamma_I} |\mathbf{v}_{h,s} \cdot \tau_j|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} \|\mathbf{u}_s\|_{1, \Omega_s} \times \left(\int_{\Gamma_I} |\mathbf{v}_{h,s} \cdot \tau_j|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \max_{1 \leq j \leq N-1} \left(\frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} \right) h \|\mathbf{u}_s\|_{1, \Omega_s} \times \|\mathbf{v}_h\|_h.
\end{aligned}$$

Afin de majorer les trois autres termes, on introduit l'opérateur de projection $\Pi_E : L^2(E) \longrightarrow \mathbb{P}^0(E)$ tel que,

$$\int_E \Pi_E v = \int_E v, \forall E \in \mathcal{E}_h. \quad (3.70)$$

L'opérateur Π_E a la propriété [98] :

$$\|v - \Pi_E v\|_E \lesssim h_E^{1/2} |v|_{1,T}, \forall v \in H^1(T), \forall E \in \mathcal{E}(T). \quad (3.71)$$

Pour $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N) \in [L^2(E)]^N$, nous notons $\Pi_E \mathbf{v} \in [\mathbb{P}^0(E)]^N$ tel que :

$$(\Pi_E \mathbf{v})_i := \Pi_E v_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.72)$$

avec l'estimation :

$$\|\mathbf{v} - \Pi_E \mathbf{v}\|_E \lesssim h_E^{1/2} |\mathbf{v}|_{1,T}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(T)^N. \quad (3.73)$$

- Majoration de R_2 : $\mathbf{n}_E \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u})|_E \in [L^2(E)]^N$, donc $\Pi_E(\mathbf{n}_E \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u})) \in \mathbb{P}^0(E)^N$.

$$\int_E \Pi_E(\mathbf{n}_E \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u})) \cdot [\mathbf{v}_h]_E = \Pi_E(\mathbf{n}_E \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u})) \int_E [\mathbf{v}_h]_E = 0. \quad (3.74)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_E \mathbf{n}_E \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}) \cdot [\mathbf{v}_h]_E &= \int_E (\mathbf{n}_E \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}) - \Pi_E(\mathbf{n}_E \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}))) \cdot [\mathbf{v}_h]_E \\ &= \int_E (I - \Pi_E)(\mathbf{n}_E \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u})) \cdot [\mathbf{v}_h]_E \\ &\lesssim \|h_E^{1/2}(I - \Pi_E)(\mathbf{n}_E \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}))\|_E \times \|h_E^{-1/2}[\mathbf{v}_h]_E\|_E \\ &\lesssim h_E |\mathbb{D}(\mathbf{u})|_{1,T} \times h_E^{-1/2} \|\mathbf{v}_h\|_E. \end{aligned}$$

D'où en sommant sur les $E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+)$, on obtient :

$$|R_2| \lesssim h |\mathbf{u}|_{2,s} \times \|\mathbf{v}_h\|_h. \quad (3.75)$$

- Majoration de R_3 et R_4 : Par la même technique, on montre que,

$$|R_3| \lesssim h (|p|_{1,s} + |p|_{1,d}) \times \|\mathbf{v}_h\|_h,$$

$$|R_4| \lesssim h(|p|_{1,d}) \times \| \mathbf{v}_h \|_h .$$

■

Théorème 3.19. ([7] *Convergence*) Soit (\mathbf{u}, p) l'unique solution du problème faible (2.146). Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant les Hypothèses 2.21 à 2.23. Soit (\mathbf{u}_h, p_h) , l'unique solution du problème discret (3.4). Si $\mathbf{u}_s \in [H^2(\Omega_s)]^N$, $\mathbf{u}_d \in [H^2(\Omega_d)]^N$, $p_s \in H^1(\Omega_s)$ et $p_d \in H^1(\Omega_d)$, alors l'estimation d'erreur a-priori suivante tient :

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_h + \| p - p_h \| \lesssim h(|\mathbf{u}_s|_{2,s} + |\mathbf{u}_d|_{2,d} + |p_s|_{1,s} + |p_d|_{1,d}). \quad (3.76)$$

Preuve. La preuve provient directement des Lemmes (3.16), (3.17) et (3.18). ■

3.4 Quelques résultats techniques

Nous rappelons d'abord dans cette section, les résultats d'analyse fonctionnelle que nous utilisons pour établir les résultats techniques. Ces résultats techniques facilitent le processus d'obtention des estimateurs d'erreur a-posteriori.

Nous commençons par le théorème suivant :

Théorème 3.20. ([69, Page 55-56]) Si la frontière $\partial K = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$ est suffisamment régulière, alors l'application $u \mapsto (f_1, f_2)$, où $f_1 = \gamma_0 u|_{\Gamma_1}$ et $f_2 = \gamma_0 u|_{\Gamma_2}$ est une application linéaire continue de $H^1(K)$ dans le sous-espace de $H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{1/2}(\Gamma_2)$ défini par la condition :

$$\int_0^\delta \frac{|f_k(x_j(\sigma)) - f_j(x_j(-\sigma))|^2}{\sigma} d\sigma < \infty, \quad k, j \in \{1, 2\} \text{ avec } j \neq k. \quad (3.77)$$

δ est un réel strictement positif défini dans le Lemme 1.5.1.9 de [69, Page 59], γ_0 est l'opérateur trace dans $H^1(K)$ et $x_j(\sigma) \in \Gamma_k$ pour $j \neq k$ et $x_j(-\sigma) \in \Gamma_j$.

Remarque 3.21. Un résultat similaire au Théorème 3.20 est établi dans la section 2 de [68] pour $N = 3$, lorsque la frontière ∂K est polyédrale et K situé d'un seul côté de sa frontière.

On introduit les espaces suivants :

$$\begin{aligned}
 H_0(\Delta^{Dir}, \Omega_d) &= \{ \psi \in H_0^1(\Omega_d), \Delta\psi \in L^2(\Omega_d) \}, \\
 H_0(\Delta^{Neu}, \Omega_d) &= \{ \psi \in H^1(\Omega_d), \Delta\psi \in L^2(\Omega_d) \text{ et } \nabla\psi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d \}, \\
 X_{dN} &= \{ \psi \in H(\mathbf{rot}, \Omega_d) \cap H(\mathbf{div}, \Omega_d), \psi \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_d \}, \\
 H_{dN} &= \{ \psi \in H(\mathbf{rot}, \Omega_d) \cap H(\mathbf{div}, \Omega_d), \psi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d \}, \\
 H_{dN} &= X_{dN} \cap [H^1(\Omega_d)]^3 \text{ et } H_{dT} = X_{dT} \cap [H^1(\Omega_d)]^3.
 \end{aligned}$$

Le second résultat d'analyse fonctionnel dont nous aurons besoin est le suivant :

Théorème 3.22. ([50, Page 8]) Si le domaine Ω_d est suffisamment régulier, alors :

1. pour tout complément fermé K_{Dir} de $H^2(\Omega_d) \cap H_0^1(\Omega_d)$ dans $H_0(\Delta^{Dir}, \Omega_d)$, nous avons :

$$X_{dN} = H_{dN} \oplus \nabla K_{Dir}; \quad (3.78)$$

2. pour tout complément fermé K_{Neu} de $H^2(\Omega_d) \cap H_0(\Delta^{Neu}, \Omega_d)$ dans $H_0(\Delta^{Neu}, \Omega_d)$, nous avons :

$$X_{dT} = H_{dT} \oplus \nabla K_{Neu}. \quad (3.79)$$

Soient à présent les espaces fonctionnels :

$$\mathbf{E} = \{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega_d)]^N, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega_d \}, \quad (3.80)$$

$$\mathbf{F} = \{ \mathbf{v} \in H(\mathbf{div}, \Omega_d), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega_d \}. \quad (3.81)$$

Il est prouvé dans [67, Page 44] que les espaces \mathbf{E} et \mathbf{F} admettent la décomposition suivante :

$$[H_0^1(\Omega_d)]^N = \mathbf{E} \oplus \mathbf{E}^\perp \text{ et } [L^2(\Omega_d)]^N = \mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^\perp, \quad (3.82)$$

où \mathbf{E}^\perp est l'orthogonal de \mathbf{E} pour le produit scalaire $(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_d}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega_d)]^N$ et \mathbf{F}^\perp est l'orthogonal de \mathbf{F} pour le produit scalaire $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_d} + (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega_d}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\mathbf{div}, \Omega_d)$.

Le dernier résultat d'analyse que nous rappelons est donné par le théorème :

Théorème 3.23. ([67])

1. [67, Page 24] : L'opérateur gradient est un isomorphisme de $L_0^2(\Omega_d)$ dans $\mathbf{E}^0 = \{ \mathbf{Y} \in [H^{-1}(\Omega_d)]^N, \langle \mathbf{Y}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{E} \}$.
2. [67, Page 24] : L'opérateur divergence est un isomorphisme de \mathbf{E}^\perp dans $L_0^2(\Omega_d)$.
3. [67, Page 40] : En dimension $N = 2$, l'opérateur rotationnel (**rot**) est un isomorphisme de $\{v \in H^2(\Omega_d), \gamma_d v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d\}$ dans \mathbf{F} .
4. [67, Page 48] : Soit \mathbf{v} une fonction de $[L^2(\Omega_d)]^3$ satisfaisant la condition $\text{div } \mathbf{v} = 0$ dans Ω_d , alors il existe une fonction vectorielle $\psi \in H(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ telle que,

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot } \psi, \quad (3.83)$$

avec les conditions aux bords,

$$\psi \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_d \text{ et } \int_{\partial\Omega_d} \psi \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.84)$$

3.4.1 Décomposition de Helmholtz

Dans cette sous-section, nous établissons un résultat de décomposition de Helmholtz pour les fonctions vectorielles appartenant à l'espace des vitesses \mathbf{H} défini en (2.141) ci-dessus.

On rappelle l'espace \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} := \{ \mathbf{v} \in H(\mathbf{div}; \Omega) : \mathbf{v}|_{\Omega_s} \in [H^1(\Omega_s)]^N, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_d = 0 \text{ sur } \Gamma_d \}, \quad (3.85)$$

avec la norme :

$$\| \mathbf{v} \|_{\mathbf{H}} := \left(|\mathbf{v}|_{1,s}^2 + \| \mathbf{v} \|_d^2 + \| \text{div } \mathbf{v} \|_d^2 \right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}. \quad (3.86)$$

Théorème 3.24. ([7]) Chaque fonction $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ admet la décomposition :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad (3.87)$$

où $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{H}$ mais satisfaisant $\mathbf{v}_0 \in [H^1(\Omega)]^N$,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s, \\ \mathbf{rot } \psi & \text{dans } \Omega_d, \end{cases} \quad (3.88)$$

où $\psi \in H_0^1(\Omega_d)$ si $N = 2$ et $\psi \in [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ si $N = 3$, avec l'estimé :

$$\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega} + \|\psi\|_{1,\Omega_d} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}. \quad (3.89)$$

Preuve. Fixons $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Alors par définition de l'espace \mathbf{H} , $\mathbf{v}|_{\Omega_s} \in [H_{0,\Gamma_s}^1(\Omega_s)]^N$ et $\gamma_s \mathbf{v} \in [H^{1/2}(\partial\Omega_s)]^N$ avec $\gamma_s \mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur Γ_s . Ainsi $\gamma_s \mathbf{v} \in [\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^N$. Comme $(\gamma_s \mathbf{v}, \mathbf{0}) \in [\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^N \times [H^{1/2}(\Gamma_d)]^N$, alors selon le Théorème 3.20 si $N = 2$ et la section 2 de [68] si $N = 3$, nous pouvons considérer un relèvement $R_0 \mathbf{v} \in [H^1(\Omega_d)]^N$ tel que,

$$\begin{cases} \gamma_d R_0 \mathbf{v} &= \gamma_s \mathbf{v} \text{ sur } \Gamma_I, \\ \gamma_d R_0 \mathbf{v} &= \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_d, \end{cases} \quad (3.90)$$

satisfaisant l'estimé,

$$\|R_0 \mathbf{v}\|_{1,\Omega} \lesssim \|\gamma_s \mathbf{v}\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}, \quad (3.91)$$

où γ_l est l'opérateur trace dans $H^1(\Omega_l)$, $l = s, d$. Donc la fonction $\mathbf{v} - R_0 \mathbf{v}$ appartient à $H(\mathbf{div}, \Omega_d)$. La propriété (3.90) entraîne,

$$(\mathbf{v} - R_0 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_d = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d, \quad (3.92)$$

qui implique, par formule de divergence :

$$\int_{\Omega_d} \operatorname{div} (\mathbf{v} - R_0 \mathbf{v}) = 0. \quad (3.93)$$

Ainsi, par le Théorème 3.23 (Point 2), il existe une unique fonction $\mathbf{w}_0 \in [H_0^1(\Omega_d)]^N$ telle que,

$$\operatorname{div} \mathbf{w}_0 = \operatorname{div} (\mathbf{v} - R_0 \mathbf{v}) \text{ dans } \Omega_d, \quad (3.94)$$

avec l'estimé,

$$\|\mathbf{w}_0\|_{1,\Omega_d} \lesssim \|\operatorname{div} (\mathbf{v} - R_0 \mathbf{v})\|_{\Omega_d}. \quad (3.95)$$

Soit maintenant $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + R_0 \mathbf{v}$. Comme $\mathbf{w}_0 \in [H_0^1(\Omega_d)]^N$ et $R_0 \mathbf{v} \in [H^1(\Omega_d)]^N$, donc $\mathbf{w} \in [H^1(\Omega_d)]^N$.

- De (3.94), on déduit que $\operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div} \mathbf{v}$ dans Ω_d .

- Comme $\mathbf{w}_0 \in [H_0^1(\Omega_d)]^N$, alors de (3.90)₁, on déduit que, $\gamma_d \mathbf{w} = \gamma_s \mathbf{v}$ sur Γ_I et de (3.90)₂, on déduit que $\gamma_d \mathbf{w} = 0$ sur Γ_d . Ainsi la fonction \mathbf{w} vérifie les propriétés :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \operatorname{div} \mathbf{w} & = & \operatorname{div} \mathbf{v} & \text{dans } \Omega_d, \\ \gamma_d \mathbf{w} & = & \gamma_s \mathbf{v} & \text{sur } \Gamma_I, \\ \gamma_d \mathbf{w} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_d. \end{array} \right. \quad (3.96)$$

De plus, des estimés (3.91) et (3.95), on déduit les estimés :

$$\| \mathbf{w} \|_{1, \Omega_d} \lesssim \| \mathbf{w}_0 \|_{1, \Omega_d} + \| R_0 \mathbf{v} \|_{1, \Omega_d} \quad (3.97)$$

$$\lesssim \| \operatorname{div} (\mathbf{v} - R_0 \mathbf{v}) \|_{\Omega_d} + \| R_0 \mathbf{v} \|_{1, \Omega} \quad (3.98)$$

$$\lesssim \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{H}}. \quad (3.99)$$

De (3.92), et du fait que $\gamma_d \mathbf{w}_0 = 0$ sur $\partial \Omega_d$, on déduit que, $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in H_0(\mathbf{div}, \Omega_d)$ et $\operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0$ dans Ω_d . Donc, si $N = 2$, par le Théorème 3.23 (Point 3), il existe une fonction unique $\psi \in H_0^1(\Omega_d)$ telle que,

$$\mathbf{rot} \psi = \mathbf{v} - \mathbf{w} \text{ dans } \Omega_d, \quad (3.100)$$

avec l'estimé,

$$\| \psi \|_{1, \Omega_d} \lesssim \| \mathbf{v} - \mathbf{w} \|_{\Omega_d}. \quad (3.101)$$

Par l'estimé (3.99), on déduit l'estimé,

$$\| \psi \|_{1, \Omega_d} \lesssim \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{H}}. \quad (3.102)$$

Nous montrons maintenant des résultats similaires si $N = 3$. Nous utilisons premièrement le Théorème 3.23 (Point 4), pour obtenir, $\psi_0 \in H(\mathbf{div}, \Omega_d) \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ (avec divergence nulle dans Ω_d), telle que,

$$\mathbf{rot} \psi_0 = \mathbf{v} - \mathbf{w} \text{ dans } \Omega_d, \quad (3.103)$$

avec l'estimé,

$$\| \psi_0 \|_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)} \lesssim \| \mathbf{v} - \mathbf{w} \|_{\Omega_d}. \quad (3.104)$$

En appliquant le Théorème 3.22 (Point 1), nous aboutissons à :

$$\psi_0 = \psi + \nabla \Phi \text{ dans } \Omega_d, \quad (3.105)$$

avec $\psi \in H^1(\Omega_d)^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ et $\Phi \in H_0^1(\Omega_d)$ satisfaisant l'estimation,

$$\|\psi\|_{1,\Omega_d} + \|\Phi\|_{1,\Omega_d} \lesssim \|\psi_0\|_{H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)}. \quad (3.106)$$

L'estimation (3.106), avec (3.104) conduisent à (3.101) et donc à (3.102), tandis que l'identité (3.100) tient encore, puisque, $\mathbf{rot}\psi = \mathbf{rot}\psi_0$. Maintenant si nous revenons à (3.100), nous avons montré que,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{rot}\psi \text{ dans } \Omega_d. \quad (3.107)$$

Par le fait que $\psi \in H_0^1(\Omega_d)$ si $N = 2$ et $\psi \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ si $N = 3$, nous avons aussi

$$\mathbf{rot}\psi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_I. \quad (3.108)$$

On définit alors \mathbf{v}_1 par (5.24) et \mathbf{v}_0 par,

$$\mathbf{v}_0 = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{dans } \Omega_s, \\ \mathbf{w} & \text{dans } \Omega_d. \end{cases} \quad (3.109)$$

Nous obtenons la décomposition (5.23) due à (3.107). Par (3.96), nous déduisons que \mathbf{v}_0 appartient à $[H_0^1(\Omega)]^N \cap \mathbf{H}$, tandis que (3.108) et la régularité de ψ conduisent à $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{H}$. Finalement, l'estimé (5.25) provient directement de (3.99) et (3.102). ■

Remarque 3.25. *Le résultat de décomposition de Helmholtz du Théorème 3.24 est spécial. Il est différent des résultats de décomposition de Helmholtz utilisés dans les papiers [15, 46, 54, 65] pour construire des estimateurs d'erreur a-posteriori fiables et efficaces. En effet, la fonction vectorielle \mathbf{v}_0 par exemple, n'est pas nécessairement le gradient d'un champ scalaire.*

3.4.2 Résultat de régularité

Nous établissons dans cette section un résultat de régularité de la vitesse du fluide dans Ω_d . En effet, la vitesse du fluide dans Ω_d est seulement $H(\mathbf{div})$ et nous avons besoin dans notre analyse d'erreur a posteriori sa trace dans Ω_d .

Théorème 3.26. ([7]) Soit $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H} \times Q$, l'unique solution du problème variationnel (2.146). Si $\mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ et $\mathbb{K} \in [C^{0,1}(\bar{\Omega}_d)]^{N \times N}$, alors il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que :

$$\mathbf{u}|_{\Omega_d} \in [H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega_d)]^N.$$

Preuve. Supposons donc que $\mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ et $\mathbb{K} \in [C^{0,1}(\bar{\Omega}_d)]^{N \times N}$. Le système (1.3) implique que

$$\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega_d, \quad (3.110)$$

et

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = g \quad \text{dans } \Omega_d, \text{ avec } g \in L^2(\Omega).$$

Définissons une fonction vectorielle \mathbf{v} par,

$$\mathbf{v} := \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{f} - \nabla p) \quad \text{dans } \Omega_d \quad (3.111)$$

On a $\mathbf{rot}(\nabla p) = \mathbf{0}$, et donc $\mathbf{rot}(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(\mathbf{f})$ dans Ω_d . Puisque $\mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}, \Omega_d)$, alors :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega_d) \text{ si } N = 2, \text{ et } \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \in [L^2(\Omega_d)]^3 \text{ si } N = 3.$$

Par ailleurs, $\mathbb{K} \mathbf{v} = \mathbf{u} \in H(\mathbf{div}, \Omega_d)$, donc $\operatorname{div} (\mathbb{K} \mathbf{v}) \in L^2(\Omega_d)$, avec les conditions aux bords,

$$(\mathbb{K} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_d = 0 \text{ sur } \Gamma_d, \quad (3.112)$$

$$\mathbf{v} \in [\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^N. \quad (3.113)$$

Ainsi, en utilisant le relèvement $R_0 \mathbf{v} \in [H^1(\Omega_d)]^N$ comme dans le Théorème 3.24 ci-dessus, nous déduisons que $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} - R_0 \mathbf{v}$ satisfait les propriétés,

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}_0) \in L^2(\Omega_d), \text{ si } N = 2 \text{ et } \mathbf{rot}(\mathbf{v}_0) \in [L^2(\Omega_d)]^3, \text{ si } N = 3, \text{ avec } \operatorname{div} (\mathbb{K} \mathbf{v}_0) \in L^2(\Omega_d).$$

$$(\mathbb{K} \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}_d = (\mathbf{v} - R_0 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_d = 0 \text{ sur } \partial \Omega_d. \quad (3.114)$$

En appliquant le Théorème 3.22 (Point 1) ci-dessus (on pourra aussi consulter [51, Théorème 3.5 de la Page 12]), nous avons l'identité :

$$\mathbf{v}_0 = \psi + \nabla \phi \text{ dans } \Omega_d, \quad (3.115)$$

avec $\psi \in [H^1(\Omega_d)]^N \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ et $\phi \in H_0^1(\Omega_d)$ telle que $\operatorname{div}(\mathbb{K} \nabla \phi) \in L^2(\Omega_d)$.

Une telle fonction ϕ appartient à $H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega_d)$ pour un certain $\epsilon > 0$ (confère [56, Pages 48 et 63]), donc $\nabla \phi \in [H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega_d)]^N$.

Par ailleurs, $\psi \in [H^1(\Omega_d)]^N \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d) \subset [H^1(\Omega_d)]^N \subset [H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega_d)]^N$, alors

$\mathbf{v}_0 \in [H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega_d)]^N$. De plus $R_0 \mathbf{v} \in [H^1(\Omega_d)]^N \subset [H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega_d)]^N$,

donc $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + R_0 \mathbf{v} \in [H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega_d)]^N$. Enfin, comme $\mathbb{K} \in [C^{0,1}(\Omega_d)]^{N \times N}$, alors

$\mathbb{K} \mathbf{v} \in [H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega_d)]^N$. Le résultat suit puisque $\mathbf{u} = \mathbb{K} \mathbf{v}$. ■

Remarque 3.27. Notons que pour chaque $\epsilon > 0$, $[H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega_d)]^N \subsetneq H(\mathbf{div}; \Omega_d)$. Le résultat du Théorème 3.26 est bien un résultat de régularité.

Remarque 3.28. Ce résultat de régularité permet de donner un sens à $\mathbf{J}^{iso}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ pour chaque $\mathbf{w} \in \mathbf{H} \cup \mathbf{H}_h$. De plus, $\mathbf{J}^{iso}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$ pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_h \cup \mathbf{H}$.

3.4.3 Opérateur d'interpolation de Oswald

Nous abordons à présent, le dernier résultat technique que nous utilisons dans ce chapitre. Il s'agit de la construction d'un nouveau opérateur d'interpolation de Oswald. Cet opérateur permet de contrôler le terme lié à la non conformité de la méthode numérique employée.

Nous commençons par énoncer les résultats suivants qui sont démontrés dans [83].

Lemme 3.29. ([83]) Etant données n -nombres réels $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $\beta = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha_j$.

Alors, on a l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j - \beta|^2 \lesssim \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_{j+1} - \alpha_j|^2. \quad (3.116)$$

Théorème 3.30. ([83]) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$ satisfaisant l'Hypothèse 2.21. Alors pour chaque $v_h \in V_h^r$, il existe $\chi \in \overset{0}{V}_h^r$ satisfaisant,

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(v_h - \chi)\|_T^2 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega)} \frac{1}{\operatorname{diam}(E)} \| [v_h]_E \|^2_E \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega)} \frac{1}{\operatorname{diam}(E)} \| [v_h]_E \|^2_E. \end{aligned} \quad (3.117)$$

où V_h^r , avec $r \in \mathbb{N}^*$, est l'espace des fonctions de degré au plus $r - 1$ par morceaux et $V_h^0 = V_h^r \cap H_0^1(\Omega)$.

L'opérateur $v_h \in V_h^r \mapsto \chi := \chi(v_h) \in V_h^0$ construit dans le Théorème 3.30 et vérifiant l'estimé (3.117) est l'opérateur d'interpolation de Oswald.

Nous construisons dans cette section un genre de cet opérateur. Pour un élément $\mathbf{u}_h \in \mathbf{H}_h$ donné, nous construisons un élément approprié \mathbf{w}_h de $\mathbf{H} \cap \mathbf{H}_h$ tel que :

$$\| \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h \|_h^2 \lesssim \mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h). \quad (3.118)$$

Nous expliquons notre construction pour $N = 2$, l'idée reste la même en dimension $N = 3$ [7].

Nous posons :

$$\tilde{I}_{Os} \mathbf{u}_{s,h} = \sum_{x \in \mathcal{N}_h \cap \bar{\Omega}_s} \alpha_x^{(s)} \lambda_x \quad \text{et} \quad \tilde{I}_{Od} \mathbf{u}_{d,h} = \sum_{x \in \mathcal{N}_h \cap \bar{\Omega}_d} \alpha_x^{(d)} \lambda_x, \quad (3.119)$$

où λ_x est la fonction de forme standard (coordonnée barycentrique) de

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h) := \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathbb{P}^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

associée à x ; $\alpha_x^{(l)} \in \mathbb{R}^N$ sera choisi de façon appropriée. L'idée est que, nous avons besoin de la continuité de la trace normale à travers Γ_I . Plus précisément, nous distinguons différents cas :

1. Si $x \in \Omega_l$, avec $l = s$ ou d , alors nous prenons la définition standard de l'opérateur de Oswald, c'est-à-dire,

$$\alpha_x^{(l)} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h : x \in \mathcal{N}(T)} \mathbf{u}_h|_T(x). \quad (3.120)$$

2. Si $x \in \bar{\Gamma}_s$, nous avons besoin que,

$$\alpha_x^{(s)} = \mathbf{0}. \quad (3.121)$$

3. Si $x \in \Gamma_I \setminus \bar{\Gamma}_s$, nous distinguons deux cas :

3a. Γ_I est régulière en x : cela signifie qu'un vecteur tangent \mathbf{t}_x et un vecteur normal \mathbf{n}_x à Γ_I existe en x . Dans ce cas, nous prenons :

$$\alpha_x^{(s)} \cdot \mathbf{n}_x = \alpha_x^{(d)} \cdot \mathbf{n}_x = \sum_{T \in \mathcal{T}_h : x \in N(T)} (\mathbf{u}_{h|T} \cdot \mathbf{n}_x)(x), \quad (3.122)$$

$$\alpha_x^{(l)} \cdot \mathbf{t}_x = \sum_{T \in \mathcal{T}_h \cap \Omega_l : x \in N(T)} (\mathbf{u}_{h|T} \cdot \mathbf{t}_x)(x), l = s, d. \quad (3.123)$$

3b. Γ_I n'est pas régulière en x : cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur tangent, ni un vecteur normal à Γ_I en x . Dans ce cas, nous définissons $\alpha_x^{(l)}$ par (3.120).

4. Si $x \in \Gamma_d$, alors dans le même esprit que dans le (Point 3), nous distinguons deux cas :

4a. Γ_d est régulière en x : cela signifie qu'un vecteur tangent \mathbf{t}_x et un vecteur normal \mathbf{n}_x à Γ_d existe en x . Dans ce cas, nous prenons,

$$\alpha_x^{(d)} \cdot \mathbf{n}_x = 0, \quad (3.124)$$

$$\alpha_x^{(d)} \cdot \mathbf{t}_x = \sum_{T \in \mathcal{T}_h \cap \Omega_d : x \in N(T)} (\mathbf{u}_{h|T} \cdot \mathbf{t}_x)(x). \quad (3.125)$$

4b. Γ_d n'est pas régulière en x . Dans ce cas, nous prenons,

$$\alpha_x^{(d)} = \mathbf{0}. \quad (3.126)$$

5. Si $x \in \Gamma_I \cap \bar{\Gamma}_d$, $\alpha_x^{(s)}$ est déjà défini au (Point 2), tandis que pour $\alpha_x^{(d)}$, nous avons besoin,

$$\alpha_x^{(d)} \cdot \mathbf{n}_I = 0, \quad (3.127)$$

et,

$$\alpha_x^{(d)} \cdot \mathbf{t}_I = \sum_{T \in \mathcal{T}_h \cap \bar{\Omega}_d : x \in N(T)} (\mathbf{u}_{h|T} \cdot \mathbf{t}_I)(x), \quad (3.128)$$

où \mathbf{n}_I (resp. \mathbf{t}_I) est le vecteur normal (resp.) tangentiel sur le segment contenu dans Γ_I et ayant x comme sommet. Avec cette définition, nous avons le Lemme suivant :

Lemme 3.31. ([7]) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satis-

faisant l'Hypothèse 2.21. Alors, pour tout $T \in \mathcal{T}_h \subset \Omega_l$, $l = s$ ou d et $x \in \mathcal{N}(T)$, on a l'estimation :

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{l,h|T}(x) - \alpha_x^{(l)}|_{\mathbb{R}^N} &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s) \cup \mathcal{E}_h(\Omega_d): x \in E} [\text{diam}(E)]^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_h\|_E \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I) \cup \mathcal{E}_h(\Gamma_d): x \in E} [\text{diam}(E)]^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_E\|_E. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Preuve. Nous prouvons l'estimé (3.129). Pour cela, nous distinguons les différents cas correspondant aux Points 1 à 5 ci-dessus. Avec les Points 1 et 2, l'estimé (3.129) est prouvé dans le Théorème 3.30 ci-dessus, et nous avons,

$$|\mathbf{u}_{l,h|T}(x) \cdot \mathbf{n}_x - \alpha_x^{(l)} \cdot \mathbf{n}_x| \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s) \cup \mathcal{E}_h(\Omega_d): x \in E} [\text{diam}(E)]^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_x\|_E.$$

Puisque, dans ce cas \mathbf{n}_x correspond à \mathbf{n}_I , nous obtenons que,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{l,h|T}(x) \cdot \mathbf{n}_x - \alpha_x^{(l)} \cdot \mathbf{n}_x| &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s) \cup \mathcal{E}_h(\Omega_d): x \in E} [\text{diam}(E)]^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_h\|_E \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I): x \in E} [\text{diam}(E)]^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_E\|_E. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Pour la composante tangentielle, nous notons que $\alpha_x^{(l)} \cdot \mathbf{t}_x$ est la moyenne de la valeur $\mathbf{u}_{l,h} \cdot \mathbf{t}_x$ dans Ω_l au voisinage de x . Donc en appliquant le Lemme 3.29, nous obtenons,

$$|\mathbf{u}_{l,h|T}(x) \cdot \mathbf{t}_x - \alpha_x^{(l)} \cdot \mathbf{t}_x| \lesssim \sum_{j=1}^{N_x^{(l)}-1} |\mathbf{u}_{l,h|T_{j+1}}(x) \cdot \mathbf{t}_x - \mathbf{u}_{l,h|T_j}(x) \cdot \mathbf{t}_x|. \quad (3.131)$$

où $T_j, j = 1, \dots, N_x^{(l)}$ sont les triangles du maillage inclus dans Ω_l et ayant x comme nœud. Ainsi,

$$|\mathbf{u}_{l,h|T}(x) \cdot \mathbf{t}_x - \alpha_x^{(l)} \cdot \mathbf{t}_x| \lesssim \sum_{j=1}^{N_x^{(l)}-1} |\mathbf{u}_{l,h|T_{j+1}}(x) - \mathbf{u}_{l,h|T_j}(x)|_{\mathbb{R}^N},$$

En utilisant l'équivalence des normes dans les espaces de dimensions finis, nous obtenons pour chaque arête E et pour chaque sommet $x \in \mathcal{N}(E)$:

$$|p(x)| \lesssim [\text{diam}(E)]^{-\frac{1}{2}} \|p\|_E, \forall p \in \mathbb{P}^1(E), \quad (3.132)$$

Nous déduisons alors que,

$$|\mathbf{u}_{l,h|T}(x) \cdot \mathbf{t}_x - \alpha_x^{(l)} \cdot \mathbf{t}_x| \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_l): x \in E} [\text{diam}(E)]^{-\frac{1}{2}} \|[\mathbf{u}_h]_E\|_E. \quad (3.133)$$

Les estimés (3.133) et (3.130) conduisent à l'estimé (3.129) dans le cas case 3a.

Dans le case 3b, si nous notons par $T_j, j = 1, \dots, N_x$ l'ensemble des triangles ayant x comme nœud, nous pouvons toujours supposer que $T_j \subset \bar{\Omega}_d$, si $j = 1, \dots, N_x^{(d)}$ avec $N_x^{(l)} < N_x$. Donc en utilisant encore le Lemme 3.29, nous obtenons :

$$|\mathbf{u}_{l,h|T}(x) - \alpha_x^{(l)}|_{\mathbb{R}^N} \lesssim \sum_{j=1}^{N_x-1} |\mathbf{u}_{h|T_{j+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_j}(x)|_{\mathbb{R}^N}.$$

En distinguant les triangles inclus dans Ω_s et Ω_d , nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{l,h|T}(x) - \alpha_x^{(l)}|_{\mathbb{R}^N} &\lesssim \sum_{j=1}^{N_x^{(d)}-1} |\mathbf{u}_{h|T_{j+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_j}(x)|_{\mathbb{R}^N} \\ &+ \sum_{j=N_x^{(d)}+1}^{N_x^{(d)}-1} |\mathbf{u}_{h|T_{j+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_j}(x)|_{\mathbb{R}^N} \\ &+ |\mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}}}(x)|_{\mathbb{R}^N}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Les deux premiers termes du second membre de (3.134) sont clairement des bon estimateurs puisqu'ils correspondent aux sauts de \mathbf{u}_h à l'intérieur de Ω_d ou Ω_s .

Considérons maintenant le dernier terme. Comme Γ_I est polygonal par morceaux, alors nous notons par $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ les deux vecteurs normaux de Γ_I en x , ou plus précisément les deux vecteurs normaux des deux arêtes E_1, E_2 de la triangulation inclus dans Γ_I qu'ayant x comme sommet. Supposons que l'arête E_2 est l'arête entre $T_{N_x^{(d)}}$ et $T_{N_x^{(d)}+1}$. Dans le cas 3b, ces deux vecteurs forment une base de \mathbb{R}^2 et donc,

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}}}(x) \right|_{\mathbb{R}^N} &\lesssim \left| \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}+1}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 \right| \\ &+ \left| \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}+1}}(x) \cdot \mathbf{n}_2 - \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}}}(x) \cdot \mathbf{n}_2 \right|. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Le second terme de (3.135) convient puisqu'il correspond au saut normal de \mathbf{u}_h à travers E_2 . Pour le premier terme de (3.135), nous faisons un tour complé autour de

x , c'est-à-dire, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}+1}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 &= \sum_{j=N_x^{(d)}}^{N_x-1} (\mathbf{u}_{h|T_{j+1}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}_{h|T_j}(x) \cdot \mathbf{n}_1) \\ &+ \mathbf{u}_{h|T_{N_x}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}_{h|T_1}(x) \cdot \mathbf{n}_1 \quad (3.136) \\ &+ \sum_{j=1}^{N_x^{(d)}-1} (\mathbf{u}_{h|T_{j+1}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}_{h|T_j}(x) \cdot \mathbf{n}_1). \end{aligned}$$

Cette identité implique que,

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}+1}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 \right| &\lesssim \sum_{j=1}^{N_x^{(d)}-1} \left| \mathbf{u}_{h|T_{j+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_j}(x) \right|_{\mathbb{R}^N} + \\ &+ \sum_{j=N_x^{(d)}}^{N_x-1} \left| \mathbf{u}_{h|T_{j+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_j}(x) \right|_{\mathbb{R}^N} + \\ &+ \left| \mathbf{u}_{h|T_{N_x}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}_{h|T_1}(x) \cdot \mathbf{n}_1 \right|. \quad (3.137) \end{aligned}$$

L'estimé (3.137) dans (3.135) conduisent à,

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}}}(x) \right|_{\mathbb{R}^N} &\lesssim \sum_{j=1}^{N_x^{(d)}-1} \left| \mathbf{u}_{h|T_{j+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_j}(x) \right|_{\mathbb{R}^N} + \\ &+ \sum_{j=N_x^{(d)}}^{N_x-1} \left| \mathbf{u}_{h|T_{j+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_j}(x) \right|_{\mathbb{R}^N} \quad (3.138) \\ &+ \left| \mathbf{u}_{h|T_{N_x}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}_{h|T_1}(x) \cdot \mathbf{n}_1 \right| \\ &+ \left| \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}+1}}(x) \cdot \mathbf{n}_2 - \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}}}(x) \cdot \mathbf{n}_2 \right|. \end{aligned}$$

Nous venons de montrer à partir des estimés (3.134) et (3.138), que :

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{u}_{l,h|T}(x) - \alpha_x^{(l)} \right|_{\mathbb{R}^N} &\lesssim \sum_{j=1}^{N_x^{(d)}-1} \left| \mathbf{u}_{h|T_{j+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_j}(x) \right|_{\mathbb{R}^N} \quad (3.139) \\ &+ \sum_{j=N_x^{(d)}}^{N_x-1} \left| \mathbf{u}_{h|T_{j+1}}(x) - \mathbf{u}_{h|T_j}(x) \right|_{\mathbb{R}^N} \\ &+ \left| \mathbf{u}_{h|T_{N_x}}(x) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}_{h|T_1}(x) \cdot \mathbf{n}_1 \right| \\ &+ \left| \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}+1}}(x) \cdot \mathbf{n}_2 - \mathbf{u}_{h|T_{N_x^{(d)}}}(x) \cdot \mathbf{n}_2 \right|. \end{aligned}$$

Comme avant, en utilisant l'estimé (3.132), nous arrivons à (3.129) dans le cas 3b. La preuve de (3.129) dans le cas 4 et 5 est faite dans le même esprit. ■

Théorème 3.32. ([7]) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant l'Hypothèse 2.21. Alors, pour chaque $\mathbf{u}_h \in \mathbf{H}_h$, nous avons l'estimation :

$$\inf_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{H} \cap \mathbf{H}_h} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_h^2 \lesssim \mathbf{J}^{iso}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h). \quad (3.140)$$

Preuve. Soit $\mathbf{u}_h \in \mathbf{H}_h$ fixé. Avec la définition de notre opérateur de Oswald, nous avons pour chaque $T \in \mathcal{T}_h \subset \Omega_l$, $l = s$ ou d , les estimés,

$$\|\nabla(\mathbf{u}_h - \tilde{I}_{Os}\mathbf{u}_h)\|_T \lesssim \sum_{x \in \mathcal{N}(T)} |\mathbf{u}_h|_T(x) - \alpha_x^{(l)}|_{\mathbb{R}^N}, \quad (3.141)$$

$$\|\mathbf{u}_h - \tilde{I}_{Os}\mathbf{u}_h\|_T \lesssim h_T \sum_{x \in \mathcal{N}(T)} |\mathbf{u}_h|_T(x) - \alpha_x^{(l)}|_{\mathbb{R}^N}, \quad (3.142)$$

De l'estimé (3.129) du Lemme 3.31 et des estimés (3.141) et (3.142), nous avons pour tout $T \in \mathcal{T}_h \subset \Omega_l$, $l = s$ ou d , l'estimé :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h - \tilde{I}_{Os}\mathbf{u}_h\|_{1,T} &\lesssim \sum_{x \in \mathcal{N}(T)} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s) \cup \mathcal{E}_h(\Omega_d): x \in E} [\text{diam}(E)]^{-\frac{1}{2}} \|[\mathbf{u}_h]_E\|_E \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I) \cup \mathcal{E}_h(\Gamma_d): x \in E} [\text{diam}(E)]^{-\frac{1}{2}} \|[\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_E]_E\|_E \right). \end{aligned} \quad (3.143)$$

Similairement, pour une arête $E' \subset \Gamma_I$, nous avons,

$$\|\mathbf{u}_{s,h} - \tilde{I}_{Os}\mathbf{u}_{s,h}\|_{E'} \lesssim \text{diam}(E)^{\frac{1}{2}} \sum_{x \in \mathcal{N}(E')} |\mathbf{u}_{s,h}|_T(x) - \alpha_x^{(s)}|_{\mathbb{R}^N},$$

où T est l'unique triangle inclu dans Ω_s ayant E' comme arête. Donc par l'estimé (3.129) nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{s,h} - \tilde{I}_{Os}\mathbf{u}_{s,h}\|_{E'} &\lesssim \sum_{x \in \mathcal{N}(E')} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s) \cup \mathcal{E}_h(\Omega_d): x \in E} [\text{diam}(E)]^{-\frac{1}{2}} \|[\mathbf{u}_h]_E\|_E \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I) \cup \mathcal{E}_h(\Gamma_d): x \in E} [\text{diam}(E)]^{-\frac{1}{2}} \|[\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_E]_E\|_E \right). \end{aligned} \quad (3.144)$$

Les estimés (3.143) et (3.144) conduisent directement à (3.118). L'estimé (3.140) suit. ■

Remarque 3.33.

1. Un opérateur d'interpolation de Oswald qui préserve la continuité de la vitesse du fluide à travers l'interface a été construit dans [46], seulement pour les approximations $H(\mathbf{div})$ – conformes pour les vitesses. Cet opérateur est donc inadéquat pour les approximations $H(\mathbf{div})$ non-conformes.
2. Un opérateur d'interpolation de Oswald a été aussi construit dans [43] en utilisant la décomposition de Helmholtz. L'estimation d'erreur d'interpolation est seulement prouvée dans la semi-norme discrète de H^1 .

3.5 Analyse d'erreur a-posteriori

Dans cette section, nous définissons premièrement les indicateurs d'erreur locaux et l'estimateur global dans la sous-section 3.5.1. Le résultat de majoration d'erreur est démontrée dans la sous-section 3.5.2 tandis que la minoration locale de l'erreur est prouvée dans la sous-section 3.5.3.

3.5.1 Indicateurs d'erreur a-posteriori

Résidus exacts-résidus approchés

Nous définissons les résidus exacts et les résidus approchés sur chaque maille T .

- **Résidus exacts sur T** : Les résidus exacts $\mathbf{R}_{l,T}$, $l = s, d$ sont localement définis par :

$$\mathbf{R}_{s,T} := \mathbf{f} + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h \text{ dans } T \in \mathcal{T}_h^s, \quad (3.145)$$

$$\mathbf{R}_{d,T} := \mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h \text{ dans } T \in \mathcal{T}_h^d. \quad (3.146)$$

- **Résidus approchés sur T** : Les résidus approchés sont notés $\mathbf{r}_{l,T}$.

$$\mathbf{r}_{l,T} \in [\mathbb{P}^k(T)]^N \text{ sur } T \in \mathcal{T}_h^l, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pour chaque $T \in \mathcal{T}_h^s$, nous prenons,

$$\mathbf{f}_T = \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{f}(x) dx.$$

Pour tout $T \in \mathcal{T}_h^d$, nous prenons \mathbf{f}_T comme l'unique élément de $[\mathbb{P}^1(T)]^N$ tel que,

$$\int_T \mathbf{f}_T(x) \cdot \mathbf{q}(x) dx = \int_T \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{q}(x) dx, \quad \forall \mathbf{q} \in [\mathbb{P}^1(T)]^N.$$

Finalement, l'approximation globale \mathbf{f}_h de \mathbf{f} est définie par :

$$\mathbf{f}_h = \mathbf{f}_T \text{ dans } T, \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

D'où :

$$\mathbf{r}_{s,T} := \mathbf{f}_T + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h \text{ dans } T \in \mathcal{T}_h^s, \quad (3.147)$$

$$\mathbf{r}_{d,T} := \mathbf{f}_T - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h \text{ dans } T \in \mathcal{T}_h^d. \quad (3.148)$$

Ensuite, nous introduisons le saut du gradient dans la direction normale par :

$$\mathbf{J}_{E, \mathbf{n}_E} := \begin{cases} [(2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - p_h \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n}_E]_E & \text{pour tout } E \in \mathcal{E}_h(\Omega), \\ \mathbf{0} & \text{pour tout } E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega). \end{cases} \quad (3.149)$$

Définition des indicateurs d'erreur a-posteriori

Définition 3.34. (*Indicateurs d'erreur résiduel-Cas isotrope [7]*) L'estimateur d'erreur a-posteriori résiduel sur une discrétisation isotrope est localement défini par :

$$\Theta_T := \left(\sum_{i=1}^9 \Theta_{i,T}^2 \right)^{1/2} \text{ pour chaque } T \in \mathcal{T}_h, \quad (3.150)$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_{1,T}^2 &:= h_T^2 \| \mathbf{r}_{l,T} \|^2_T, \text{ si } T \in \mathcal{T}_h^l, l = s \text{ ou } d, \\ \Theta_{2,T}^2 &:= \begin{cases} h_T^2 \| \operatorname{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \|^2_T & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d, \\ 0 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \end{cases} \\ \Theta_{3,T}^2 &:= \| g - \operatorname{div} \mathbf{u}_h \|^2_T, \\ \Theta_{4,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \bar{\Gamma}_I)} \operatorname{diam}(E) \times \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \mathbf{u}_{s,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + \frac{\sqrt{\kappa_j}}{\alpha_1} 2\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j \right\|_E^2 \right\}, \\ \Theta_{5,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \bar{\Gamma}_I)} \operatorname{diam}(E) \times \| p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s \|^2_E, \\ \Theta_{6,T}^2 &:= \begin{cases} \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \bar{\Omega}_s)} \operatorname{diam}(E) \times \| \mathbf{J}_{E, \mathbf{n}_E} \|^2_E & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \Omega_d)} \operatorname{diam}(E) \times \| [p_h]_E \|^2_E & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{7,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \Omega_d)} \left(\frac{1}{\text{diam}(E)} \right) \times \| [\mathbf{u}_h]_E \|_E^2, \\
\Theta_{8,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \partial \Omega_d)} \left(\frac{1}{\text{diam}(E)} \right) \times \| [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_E]_E \|_E^2, \\
\Theta_{9,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \Omega_s^+)} \left(\frac{1}{\text{diam}(E)} \right) \times (1 + 2\mu) \| [\mathbf{u}_h]_E \|_E^2,
\end{aligned}$$

avec :

$$\mathbf{u}_{l,h} := \mathbf{u}_h|_{\Omega_l}, \quad (3.151)$$

$$p_{l,h} := p_h|_{\Omega_l}, l = s, d. \quad (3.152)$$

- L'estimateur d'erreur global est maintenant donné par :

$$\Theta := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Theta_T^2 \right)^{1/2}. \quad (3.153)$$

1. **Les termes d'approximation locaux** : Les termes d'approximation locaux sont définis par,

$$\zeta_T := \begin{cases} h_T \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T, & \forall T \in \mathcal{T}_h^s, \\ h_T (\| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T + \| \mathbf{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \|_T) & \forall T \in \mathcal{T}_h^d. \end{cases}$$

2. Le terme d'approximation global est alors défini par :

$$\zeta := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \zeta_T^2 \right)^{1/2}. \quad (3.154)$$

Remarque 3.35. Notons ici le caractère résiduel des termes $\Theta_{i,T}$, $i = 1, \dots, 9$ de Θ_T . En effet, si (\mathbf{u}_h, p_h) devrait être la solution exacte de (2.146), les $\Theta_{i,T}$ s'annuleraient. Notons également que les indicateurs d'erreur $\Theta_{i,T}$, $i \in \{7, 8, 9\}$ sont dus à la non-conformité de la méthode employée.

3.5.2 Majoration d'erreur a-posteriori

Nous allons maintenant établir une majoration globale de la norme de l'erreur.

1. Nous définissons sur $\mathbf{H} \times Q$, la forme bilinéaire continue \mathbb{B} par :

$$\mathbb{B}(\mathbf{U}, \mathbf{W}) := \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{b}(\mathbf{u}, q) + \mathbf{b}(\mathbf{w}, p), \text{ pour } \mathbf{U} = (\mathbf{u}, p) \text{ et pour } \mathbf{W} = (\mathbf{w}, q).$$

Clairement, le problème continu (2.146) est équivalent au problème suivant : trouver $\mathbf{U} \in \mathbf{H} \times Q$ tel que,

$$\mathbb{B}(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = L(\mathbf{W}), \forall \mathbf{W} \in \mathbf{H} \times Q. \quad (3.155)$$

2. Nous définissons aussi sur l'espace discret $\mathbf{H}_h \times Q_h$, la forme

$$\mathbb{B}_h(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) := \mathbf{a}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{u}_h, q_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{w}_h, p_h) + \mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h).$$

Le problème (3.4) est équivalent au problème : trouver $\mathbf{U}_h \in \mathbf{H}_h \times Q_h$ tel que,

$$\mathbb{B}_h(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) = L(\mathbf{W}_h), \forall \mathbf{W}_h \in \mathbf{H}_h \times Q_h. \quad (3.156)$$

3. Les espaces $\mathbf{H} \times Q$ et $\mathbf{H}_h \times Q_h$ sont munis de la norme-produit :

$$|||(\mathbf{u}, p)||| = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}} + \|p\| \text{ et } |||(\mathbf{u}_h, p_h)|||_h = \|\mathbf{u}_h\|_h + \|p_h\| \text{ respectivement.}$$

Nous commençons avec le résultat suivant :

Lemme 3.36. ([7]) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant les Hypothèses 2.21 et 2.22. On suppose de plus que, les hypothèses du Théorème 3.26 sont satisfaites. Alors, pour tout $\mathbf{W} = (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H} \times Q$, nous avons l'estimé :

$$\mathbb{B}_h(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{W}) \lesssim (\Theta_1 + \zeta) \times ||| \mathbf{W} |||_h, \quad (3.157)$$

où l'estimateur Θ_1 est défini par :

$$\Theta_1 := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{i=1}^6 \Theta_{i,T}^2 \right) \right\}^{1/2}. \quad (3.158)$$

Preuve. Soient $\mathbf{W} = (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H} \times Q$. Par le Théorème 3.24, \mathbf{v} admet la décomposition

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad (3.159)$$

où $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{H}$ mais satisfaisant $\mathbf{v}_0 \in H^1(\Omega)^N$,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s, \\ \mathbf{rot}\psi & \text{dans } \Omega_d, \end{cases} \quad (3.160)$$

où $\psi \in H_0^1(\Omega_d)$ si $N = 2$ et $\psi \in [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ si $N = 3$, avec l'estimé :

$$\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega} + \|\psi\|_{1,\Omega_d} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}. \quad (3.161)$$

Nous définissons :

$$\mathbf{v}_{0,h} := \mathbf{I}_{CI}\mathbf{v}_0, \quad (3.162)$$

$$\mathbf{v}_{1,h} := \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s, \\ \mathbf{rot}\psi_h & \text{dans } \Omega_d, \end{cases} \quad (3.163)$$

où

$$\psi_h = \begin{cases} I_{CI}^0 \psi & , \quad \text{si } N = 2 \\ \mathcal{P}_{CI} \psi & , \quad \text{si } N = 3 \end{cases} \quad (3.164)$$

Alors nous prenons $\mathbf{W}_h = (\mathbf{v}_h, 0) \in \mathbf{H}_h \times Q_h$ avec $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_{0,h} + \mathbf{v}_{1,h}$. Par le Théorème 3.26 et le Théorème 3.24, nous avons :

$$\mathbb{B}_h(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) = 0, \quad (3.165)$$

$$\mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H} \cup \mathbf{H}_h, \quad (3.166)$$

$$\mathbf{J}^{\text{iso}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H} \cup \mathbf{H}_h, \quad (3.167)$$

$$\text{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) = \text{div}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h}) \text{ dans } \Omega. \quad (3.168)$$

En utilisant ces données, avec les identités (3.165)-(3.168), on obtient les égalités :

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_h(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{W}) &= \mathbb{B}_h(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{W} - \mathbf{W}_h) \\ &= \mathbf{a}_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, p - p_h) \\ &+ \mathbf{b}_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, q) \\ &= \mathbf{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, p) + \mathbf{b}_h(\mathbf{u}, q) \\ &- [\mathbf{a}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, p_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{u}_h, q)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_\Omega - (g, q)_\Omega \\
&- [\mathbf{a}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, p_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{u}_h, q)] \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T - (g, q)_T \\
&- 2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} (\mathbb{D}(\mathbf{u}_h), \mathbb{D}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h))_T \\
&- \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} \langle \mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_j, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_I} \\
&- \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(p_h, \operatorname{div}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h}))_T - (q, \operatorname{div} \mathbf{u}_h)_T].
\end{aligned} \tag{3.169}$$

Maintenant, on utilise des formules de Green. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_h(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{W}) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left[2\mu (\operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T - 2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_{\partial T} \right. \\
&+ (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T - (g, q)_T - (\nabla p_h, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h})_T \\
&+ (p_h, (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h}) \cdot \mathbf{n})_{\partial T} + (q, \operatorname{div} \mathbf{u}_h)_T \Big] \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left[-(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T - (\nabla p_h, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h})_T \right. \\
&+ (p_h, (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h}) \cdot \mathbf{n})_{\partial T} + (q, \operatorname{div} \mathbf{u}_h)_T + (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T - (g, q)_T \Big] \\
&- \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} \langle \mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_j, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_I}.
\end{aligned} \tag{3.170}$$

En utilisant le fait que $\mathbf{f} = (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) + \mathbf{f}_h$, puis en tenant compte de la décomposition de \mathbf{v} , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_h(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{W}) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left[(\mathbf{f}_h + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T \right. \\
&+ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T + (q, \operatorname{div} \mathbf{u}_h - g)_T \Big] \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left[(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h})_T + (q, \operatorname{div} \mathbf{u}_h - g)_T \right] \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h})_T + (\mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1,h})_T]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+)} (\mathbf{J}_{E, \mathbf{n}_E}, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h})_E + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([p_h]_E, (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_E \quad (3.171) \\
& - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + 2 \frac{\sqrt{\kappa_j}}{\alpha_1} \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j, (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j)_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)} (p_{s,h} - p_{d,h} - 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s, (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h}) \cdot \mathbf{n}_s)_E.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons l'identité :

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1,h} = \mathbf{rot}(\psi - \psi_h) \text{ dans } T. \quad (3.172)$$

Maintenant, puisque $\mathbf{f} \in H(\mathbf{rot}, \Omega_d)$, alors en utilisant la formule de Green (2.96), on a l'identité :

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} (\mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1,h})_T &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} (\mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{rot}(\psi - \psi_h))_T \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left[(\mathbf{rot}(\mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h), \psi - \psi_h)_T \right. \quad (3.173) \\
&\quad \left. + ((\mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \times \mathbf{n}, \psi - \psi_h)_{\partial T} \right].
\end{aligned}$$

ou encore,

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} (\mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1,h})_T &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left[(\mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h), \psi - \mathbb{I}_{cl}^o \psi)_T + (\mathbf{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h), \psi - \mathbb{I}_{cl}^o \psi)_T \right] \\
&\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}_E]_E, \psi - \mathbb{I}_{cl}^o \psi)_E. \quad (3.174)
\end{aligned}$$

Injectons maintenant (3.174) dans (3.171) pour avoir :

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_h(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{W}) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left[(\mathbf{f}_h + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T + (q, \operatorname{div} \mathbf{u}_h - g)_T \right] \\
&\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left[(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h})_T + (q, \operatorname{div} \mathbf{u}_h - g)_T \right] \\
&\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h})_T +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left[(\mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h), \psi - \psi_h)_T + (\mathbf{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h), \psi - \psi_h)_T \right] \\
& - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}_E]_E, \psi - \psi_h)_E \\
& - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+)} (\mathbf{J}_{E, \mathbf{n}_E}, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h})_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([p_h]_E, (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_E \\
& - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + 2 \frac{\sqrt{\kappa_j}}{\alpha_1} \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j, (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j)_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)} (p_{s,h} - p_{d,h} - 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s, (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0,h}) \cdot \mathbf{n}_s)_E.
\end{aligned} \tag{3.175}$$

Enfin, on applique successivement l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les estimations d'interpolation de Clément du Lemme 2.30 pour avoir l'estimé (3.157). Le lemme est ainsi complètement démontré. ■

Le second résultat que nous établissons dans cette sous-section est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.37. ([7]) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant les Hypothèses usuelles 2.21 et 2.22. On suppose de plus que, les hypothèses du Théorème 3.26 sont satisfaites. Alors, nous avons l'estimation suivante :

$$\| \mathbf{e} \|_h + \| \varepsilon \| \lesssim \Theta_1 + \zeta + \inf_{v_h \in \mathbf{H} \cap \mathbf{H}_h} \| \mathbf{u}_h - v_h \|_h. \tag{3.176}$$

où Θ_1 est donné par (3.158).

Preuve. Soit \mathbf{W}_h un élément arbitraire dans $\mathbf{H} \cap \mathbf{H}_h \times Q_h$. La condition inf-sup de \mathbb{B} sur $\mathbf{H} \times Q$ conduit à :

$$||| \mathbf{U} - \mathbf{W}_h |||_h \lesssim \sup_{\mathbf{W} \in \mathbf{H} \times Q} \frac{\mathbb{B}(\mathbf{U} - \mathbf{W}_h, \mathbf{W})}{||| \mathbf{W} |||_h}.$$

La linéarité de \mathbb{B}_h dans le premier argument permet d'écrire,

$$||| \mathbf{U} - \mathbf{W}_h |||_h \lesssim \sup_{\mathbf{W} \in \mathbf{H} \times Q} \left\{ \frac{\mathbb{B}_h(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{W}) + \mathbb{B}_h(\mathbf{U}_h - \mathbf{W}_h, \mathbf{W})}{||| \mathbf{W} |||_h} \right\}. \tag{3.177}$$

En combinant les estimés (3.157) et (3.177), il vient :

$$||| \mathbf{U} - \mathbf{W}_h |||_h \lesssim \Theta_1 + \zeta + \sup_{\mathbf{W} \in \mathbf{H} \times Q} \frac{\mathbb{B}_h(\mathbf{U}_h - \mathbf{W}_h, \mathbf{W})}{||| \mathbf{W} |||_h}. \quad (3.178)$$

La continuité de l'opérateur \mathbb{B}_h implique que :

$$||| \mathbf{U} - \mathbf{W}_h |||_h \lesssim \Theta_1 + \zeta + ||| \mathbf{U}_h - \mathbf{W}_h |||_h. \quad (3.179)$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire, nous avons,

$$||| \mathbf{U} - \mathbf{U}_h |||_h \lesssim \Theta_1 + \zeta + ||| \mathbf{U}_h - \mathbf{W}_h |||_h, \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathbf{H} \cap \mathbf{H}_h \times Q_h, \quad (3.180)$$

ou de façon équivalente,

$$\| \mathbf{e} \|_h + \| \varepsilon \| = ||| \mathbf{U} - \mathbf{U}_h |||_h \lesssim \Theta_1 + \zeta + \inf_{\mathbf{W}_h \in \mathbf{H} \cap \mathbf{H}_h \times Q_h} ||| \mathbf{U}_h - \mathbf{W}_h |||_h.$$

Par ailleurs, on a trivialement :

$$\inf_{\mathbf{W}_h \in \mathbf{H} \cap \mathbf{H}_h \times Q_h} ||| \mathbf{U}_h - \mathbf{W}_h |||_h \lesssim \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H} \cap \mathbf{H}_h} \| \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h \|_h.$$

Et le lemme suit. ■

Remarque 3.38. Le terme $\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H} \cap \mathbf{H}_h} \| \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h \|_h$ qui apparaît dans le second membre de l'estimé (3.176) est dû à la non conformité de la méthode employée. Ce terme s'annule lorsque l'approximation est \mathbf{H} -conforme. On contrôle alors ce terme à travers le Lemme 3.39 ci-dessous.

Lemme 3.39. ([7] *Estimateur de non conformité*) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant les Hypothèses usuelles 2.21 et 2.22. Alors, on a l'estimation suivante :

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H} \cap \mathbf{H}_h} \| \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h \|_h \lesssim \Theta_2, \quad (3.181)$$

où Θ_2 est l'estimateur de non conformité de la méthode employée. Il est défini par :

$$\Theta_2 := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{i=7}^9 \Theta_{i,T} \right) \right\}^{1/2}. \quad (3.182)$$

Preuve. La preuve découle directement de l'estimé (3.140) du Théorème 3.32. ■

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette sous-section :

Théorème 3.40. (Fiabilité [7]) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant les Hypothèses 2.21 et 2.22. On suppose de plus que, les hypothèses du Théorème 3.26 sont satisfaites. Alors, l'estimateur d'erreur a-posteriori isotrope Θ satisfait l'estimation :

$$\| \mathbf{e} \|_h + \| \varepsilon \| \lesssim \Theta + \zeta. \quad (3.183)$$

Preuve. La preuve provient directement du Lemme 3.37 et du Lemme 3.39 et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

3.5.3 Minoration d'erreur a-posteriori

Pour prouver l'efficacité de la famille d'indicateurs d'erreur locaux, nous introduisons pour $\omega \subset \Omega$,

$$\begin{aligned} \| \mathbf{v} \|_{h,\omega}^2 &= \sum_{T \subset \bar{\omega} \cap \bar{\Omega}_s} |\mathbf{v}|_{1,T}^2 \\ &+ \sum_{T \subset \bar{\omega} \cap \bar{\Omega}_d} (\| \mathbf{v} \|_T^2 + \| \nabla \cdot \mathbf{v} \|_T^2) \\ &+ \| \mathbf{v}_s \times \mathbf{n} \|_{\Gamma_I \cap \bar{\omega}}^2 + \sum_{T \subset \bar{\omega}} \mathbf{J}_T^{\text{iso}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_T^{\text{iso}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= (1 + 2\mu) \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+) \cap \mathcal{E}(T)} \left(\frac{1}{\text{diam}(E)} \right) \times \| [\mathbf{v}]_E \|_E^2 \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d) \cap \mathcal{E}(T)} \left(\frac{1}{\text{diam}(E)} \right) \times \| [\mathbf{v}]_E \|_E^2 \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega_d) \cap \mathcal{E}(T)} \left(\frac{1}{\text{diam}(E)} \right) \times \| [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_E]_E \|_E^2. \end{aligned}$$

Le résultat principal de cette sous-section s'énonce comme suit :

Théorème 3.41. (Efficacité [7]) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant les Hypothèses 2.21 et 2.22. On suppose de plus que, les hypothèses

du Théorème 3.26 sont satisfaites. Alors, l'estimateur d'erreur local Θ_T satisfait l'estimation :

$$\Theta_T \lesssim \| \mathbf{e} \|_{h, \tilde{\omega}_T} + \| \varepsilon \|_{\tilde{\omega}_T} + \sum_{T' \subset \tilde{\omega}_T} \zeta_{T'}, \quad (3.184)$$

où $\tilde{\omega}_T$ est l'union finie des éléments voisins de T .

Preuve. Nous commençons par borner séparément chaque terme du résidu. Puisque par le Théorème 3.26 le saut de \mathbf{u} à travers toutes les arêtes/faces de Ω_d est nul, alors pour $i \in \{7, 8, 9\}$, nous avons clairement l'estimation :

$$\Theta_{i,T}^2 \lesssim \mathbf{J}_T^{\text{iso}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = \mathbf{J}_T^{\text{iso}}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \lesssim \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{h,T}. \quad (3.185)$$

Ainsi, il reste à estimer les indicateurs d'erreur locaux $\Theta_{i,T}$ pour $i \leq 6$.

1. **Terme résiduel dans Ω_s .** Nous majorons le terme $\Theta_{1,T}$ pour $T \subset \Omega_s$: Pour cela, on pose,

$$\mathbf{w}_T := \mathbf{r}_{s,T} b_T \in [H_0^1(T)]^N, \quad (3.186)$$

puis on considère,

$$\int_T \mathbf{r}_{s,T} \cdot \mathbf{w}_T = \int_T (\mathbf{f}_h + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_T \quad (3.187)$$

Nous introduisons \mathbf{f} et nous utilisons la formulation faible (2.146) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{r}_{s,T} \cdot \mathbf{w}_T &= \int_T (\mathbf{f}_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T + \\ &+ \int_T (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{w}_T - p \operatorname{div} \mathbf{w}_T) \\ &+ \int_T (2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_T. \end{aligned}$$

En intégrant par partie le dernier terme, on obtient :

$$\int_T \mathbf{r}_{s,T} \cdot \mathbf{w}_T = \int_T (\mathbf{f}_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T + 2\mu \int_T \mathbb{D}(\mathbf{e}) : \nabla(\mathbf{w}_T) - \int_T \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_T.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz implique que :

$$\int_T \mathbf{r}_{s,T} \cdot \mathbf{w}_T \lesssim \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_T \|\mathbf{w}_T\|_T + (2\mu|\mathbf{e}|_{1,T} + \|\varepsilon\|_T) |\mathbf{w}_T|_{1,T}.$$

Les inégalités inverses (2.88), (2.89) et la relation triviale $\|\mathbf{w}_T\|_T \leq \|\mathbf{r}_{s,T}\|_T$ impliquent :

$$\|\mathbf{r}_{s,T}\|_T^2 \lesssim (\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_T + h_T^{-1}|\mathbf{e}|_{1,T} + h_T^{-1}\|\varepsilon\|_T) \|\mathbf{r}_{s,T}\|_T,$$

ou de façon équivalente :

$$\Theta_{1,T} \lesssim h_T \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_T + |\mathbf{e}|_{1,T} + \|\varepsilon\|_T. \quad (3.188)$$

2. Terme résiduel dans Ω_d . Nous majorons $\Theta_{1,T}$ pour $T \subset \Omega_d$: Posons

$$\mathbf{w}_T := \mathbf{r}_{d,T} b_T \in [H_0^1(T)]^N \quad (3.189)$$

En utilisant la formulation faible (2.146) et en intégrant par partie sur T , on obtient

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{r}_{d,T} \cdot \mathbf{w}_T &= \int_T (\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_T \\ &= \int_T (\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_T \\ &\quad + \int_T (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T - p \operatorname{div} \mathbf{w}_T \\ &= \int_T (\mathbf{f}_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T + \int_T (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \cdot \mathbf{w}_T - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_T). \end{aligned}$$

Comme précédemment, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités inverses (2.88)-(2.89) conduisent à :

$$\Theta_{1,T} \lesssim h_T \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_T + \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}\|_T + \|\varepsilon\|_T. \quad (3.190)$$

3. Terme résiduel (rotationnel) dans Ω_d . Nous majorons $\Theta_{2,T}$ pour $T \subset \Omega_d$.

Pour $T \in \mathcal{T}_h^d$, nous posons :

$$K_T = \operatorname{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \text{ et } \mathbf{w}_T = K_T b_T. \quad (3.191)$$

Nous notons que $\mathbf{rot}(\mathbf{w}_T)$ appartient à l'espace \mathbf{H} et est à divergence nul, donc par (2.146), nous avons,

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{rotw}_T) = (\mathbf{f}, \mathbf{rotw}_T)_T,$$

ou de façon équivalente :

$$\int_T (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{rotw}_T = 0. \quad (3.192)$$

Mais en utilisant la formule de Green (2.96), nous pouvons écrire :

$$\int_T K_T \cdot \mathbf{w}_T = \int_T \mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T + \int_T (\mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{rotw}_T,$$

et en utilisant (3.192) nous déduisons que,

$$\int_T K_T \cdot \mathbf{w}_T = \int_T \mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T + \int_T \mu \mathbb{K}^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{rotw}_T.$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\int_T K_T \cdot \mathbf{w}_T \leq \|\mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mathbf{f})\|_T \|\mathbf{w}_T\|_T + \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}\|_T \|\mathbf{rotw}_T\|_T.$$

Encore les inégalités inverses (2.88)-(2.89) conduisent à :

$$\Theta_{2,T} \lesssim \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}\|_T + h_T \|\mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mathbf{f})\|_T. \quad (3.193)$$

4. **Terme résiduel dans Ω .** Majoration du terme $\Theta_{3,T}$ pour $T \subset \Omega$: Nous voyons directement que,

$$g - \operatorname{div} \mathbf{u}_h = \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{u}_h = \operatorname{div} \mathbf{e}$$

Donc par inégalité de Cauchy-Schwarz, on conclut que :

$$\Theta_{3,T} = \|g - \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_T \leq \|\operatorname{div} \mathbf{e}\|_T. \quad (3.194)$$

5. **Termes d'interface liés au couplage.** Nous estimons les termes $\Theta_{4,T}$ et $\Theta_{5,T}$ qui sont des indicateurs liés au couplage. Pour cela, nous fixons une arête/face E inclut dans Γ_I et pour une constante r_E fixé et un vecteur unitaire \mathbf{N} , nous

considérons

$$\mathbf{w}_E = r_E b_E \mathbf{N},$$

qui appartient clairement à \mathbf{H} . Donc la formulation faible (2.146) conduit à :

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_E) + \mathbf{b}(\mathbf{w}_E, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_E)_{\omega_E},$$

qui est équivalente à :

$$\begin{aligned} & \int_{T_s} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) - p \nabla \cdot \mathbf{w}_E) + \int_{T_d} (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_E - p \operatorname{div} \mathbf{w}_E) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_s \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_E)_{\omega_E}, \end{aligned}$$

où T_s (resp. T_d) est l'unique triangle/tétraèdre inclu dans $\bar{\Omega}_s$ (respectivement dans $\bar{\Omega}_d$) et ayant E comme arête/face. En d'autre terme, les intégrations par partie dans T_s et dans T_d conduisent à

$$\begin{aligned} & \int_{T_s} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) - p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_E) + \int_{T_d} (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{w}_E - p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_E) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\ & = - \int_{T_s} (2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_E + \int_{T_d} (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{w}_E + \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_E \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \tag{3.195} \\ & - \int_E ([p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E - 2\mu (D(\mathbf{u}_{s,h} \mathbf{n}_E) \cdot \mathbf{w}_E)). \end{aligned}$$

En soustrayant cette identité de (4.140), nous trouvons :

$$\begin{aligned} & \int_E ([p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E - 2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h} \mathbf{n}_E) \cdot \mathbf{w}_E) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\ & = \int_{T_s} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{e}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) + \int_{T_d} (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \cdot \mathbf{w}_E - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{e}_s \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\
& - \int_{T_s} (\mathbf{f} + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_E - \int_{T_d} (\mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{w}_E - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_E.
\end{aligned}$$

Dans le dernier terme, nous introduisons les éléments résiduels $\mathbf{r}_{l,T}$ pour arriver à :

$$\begin{aligned}
& \int_E ([p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E - 2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \mathbf{n}_E \cdot \mathbf{w}_E) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\
& = \int_{T_s} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{e}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) + \int_{T_d} (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \cdot \mathbf{w}_E - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) \\
& + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{e}_s \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\
& - \int_{T_s} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h + \mathbf{r}_{s,T}) \cdot \mathbf{w}_E - \int_{T_d} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h + \mathbf{r}_{d,T}) \cdot \mathbf{w}_E.
\end{aligned} \tag{3.196}$$

• Estimation du terme $\Theta_{4,T}$: Pour chaque $j = 1, \dots, N-1$, nous prenons $r_E = \mathbf{u}_h \cdot \tau_j + \frac{\sqrt{\kappa_j}}{\alpha_1} 2\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) \cdot \tau_j$ et $\mathbf{N} = \tau_j$. Avec ce choix, l'identité (4.141) et l'inégalité inverse (2.90) donnent :

$$\begin{aligned}
\|r_E\|_E^2 & \lesssim \int_{T_s} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{e}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) + \int_{T_d} (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \cdot \mathbf{w}_E - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) \\
& + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{e}_s \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\
& - \int_{T_s} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h + \mathbf{r}_{s,T}) \cdot \mathbf{w}_E - \int_{T_d} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h + \mathbf{r}_{d,T}) \cdot \mathbf{w}_E.
\end{aligned} \tag{3.197}$$

Ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité inverse (2.91) et les estimations (3.188) et (3.190) conduisent à :

$$\operatorname{diam}(E)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_h \cdot \tau_j + \frac{\sqrt{\kappa_j}}{\alpha_1} 2\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) \cdot \tau_j\|_E \lesssim |\mathbf{e}|_{h,\omega_E} + \|\varepsilon\|_{h,\omega_E} + \sum_{T' \subset \omega_E} \zeta_{T'} \tag{3.198}$$

avec $\omega_E = T_s \cup T_d$.

• Estimons le terme $\Theta_{5,T}$: Nous prenons ici $r_E = p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s$ et $\mathbf{N} = \mathbf{n}_s$. Comme précédemment, l'identité (4.141), les inégalités inverses (2.90)-

(2.91) et les estimations (3.188) et (3.190) conduisent à

$$\text{diam}(E)^{\frac{1}{2}} \|p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s\|_E \lesssim |\mathbf{e}|_{h,\omega_E} + \|\varepsilon\|_{h,\omega_E} + \sum_{T' \subset \omega_E} \zeta_{T'} \quad (3.199)$$

6. **Terme d'interface dans Ω_s .** Majoration de $\Theta_{5,T}$: Pour chaque arête/face $E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s)$, nous considérons $\omega_E = T_1 \cup T_2$, avec $\partial T_1 \cap \partial T_2 = E$. Comme $\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} \in [\mathbb{P}^0(E)]^N$, nous pouvons poser :

$$\mathbf{w}_E := -\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} b_E \in [H_0^1(\omega_E)]^N. \quad (3.200)$$

Premièrement, la formulation faible (2.146) conduit à :

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_E) + \mathbf{b}(\mathbf{w}_E, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_E)_{\omega_E},$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_E} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_E &= \int_{\omega_E} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}) - p\mathbb{I}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) \\ &+ \int_{\partial\omega_E} (p\mathbb{I} - 2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u})) \mathbf{n}_E \cdot \mathbf{w}_E. \end{aligned}$$

Par intégration par partie élément par élément, nous avons donc l'égalité :

$$\begin{aligned} - \int_E \mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} \cdot \mathbf{w}_E &= \int_{\omega_E} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - p_h \mathbb{I}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) \\ &- \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (-2\mu \text{div } \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) + \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_E. \end{aligned}$$

Par l'identité précédente (4.145), nous obtenons :

$$\begin{aligned} - \int_E \mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} \cdot \mathbf{w}_E &= \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\mathbf{f} - (-2\mu \text{div } \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) + \nabla p_h)) \cdot \mathbf{w}_E \\ &- \int_{\omega_E} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{e}) - \varepsilon \mathbb{I}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E). \end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant l'approximation \mathbf{f}_h de \mathbf{f} et nous utilisons l'inégalité

de Cauchy-Schwarz et les inégalités inverses (2.90)-(2.91) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}\|_E &\lesssim \text{diam}(E)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^2 (\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{T_i} + \|\mathbf{r}_{s,T_i}\|_{T_i}) \right) \\ &+ \text{diam}(E)^{-1/2} (\|\mathbf{e}\|_{1,\omega_E} + \|\varepsilon\|_{\omega_E}). \end{aligned}$$

L'estimation (3.188) de $\Theta_{1,T}$ et l'inégalité triviale $h_E \leq h_T$ impliquent l'estimation :

$$\sqrt{\text{diam}(E)} \|\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}\|_E \lesssim \|\mathbf{e}\|_{1,\omega_E} + \|\varepsilon\|_{\omega_E} + \sum_{T' \subset \omega_E} h_{T'} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{T'} \quad (3.201)$$

7. **Terme d'interface dans Ω_d .** Majoration de $\Theta_{6,T}$: Pour chaque arête/face $E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)$, nous considérons $\omega_E = T_1 \cup T_2$. Comme $[p_h]_E \in \mathbb{P}^0(E)$, nous posons

$$\mathbf{w}_E := [p_h]_E b_E \mathbf{n}_E \in [H_0^1(\omega_E)]^N.$$

Premièrement nous notons que $p \in H^1(\omega_E)$. Nous avons par formule de Green

$$\int_{\omega_E} (\nabla p \cdot \mathbf{w}_E + p \text{div } \mathbf{w}_E) = 0.$$

Encore par intégration par partie élément par élément, on a donc :

$$\int_E [p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E = \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\nabla p_h \cdot \mathbf{w}_E + p_h \nabla \cdot \mathbf{w}_E).$$

En prenant la différence de ces deux identités, nous obtenons :

$$\int_E [p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E = \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\nabla(p_h - p) \cdot \mathbf{w}_E + (p_h - p) \text{div } \mathbf{w}_E).$$

En rappelant que $\nabla p = \mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}$ et en introduisant le terme $\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h$, nous trouvons :

$$\int_E [p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E = \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\nabla p_h - \mathbf{f} + \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}_E + (p_h - p) \text{div } \mathbf{w}_E$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\nabla p_h - \mathbf{f}_h + \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{w}_E + (p_h - p) \operatorname{div} \mathbf{w}_E \\
&+ \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\mathbf{f}_h - \mathbf{f} + \mu \mathbb{K}^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)) \cdot \mathbf{w}_E.
\end{aligned}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalités inverses conduisent à :

$$\begin{aligned}
\|[p_h]_E\|_E &\lesssim \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{r}_{d,T_i}\|_{T_i} \operatorname{diam}(E)^{1/2} + \|p_h - p\|_{T_i} \operatorname{diam}(E)^{-1/2} \\
&+ \operatorname{diam}(E)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^2 (\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{T_i} + \|\mathbb{K}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{T_i}).
\end{aligned}$$

Par (3.190), nous déduisons que

$$\operatorname{diam}(E)^{\frac{1}{2}} \|[p_h]_E\|_E \lesssim \sum_{T' \subset \omega_E} h_{T'} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{T'} + \|\varepsilon\|_{\omega_E} + \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}\|_{\omega_E}. \quad (3.202)$$

Les estimations (3.185), (3.188), (3.190), (3.193), (3.194), (3.198), (3.199), (3.201) et (3.202) prouvent l'estimation désirée.

■

3.6 Conclusion

Nous avons proposé et analysé dans ce chapitre, une famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori du type résiduel. Nous avons considéré une discrétisation isotrope. Nous avons utilisé une variante de la méthode d'éléments finis non-conforme de Crouzeix-Raviart pour approcher la vitesse du fluide dans Ω . La pression du fluide dans Ω est approchée dans l'espace des fonctions constantes par morceaux. Nous avons démontré que le problème discret associé est stable via le théorème de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi. Un résultat d'estimation d'erreur a-priori optimal est présenté. Nous avons prouvé que la famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori construite est optimale. En outre, nous avons montré rigoureusement que cette famille est à la fois fiable et efficace.

Analyse d'erreur a-posteriori d'une méthode d'éléments finis mixtes non-conforme sur une discrétisation anisotrope

Sommaire

4.1	Introduction	123
4.2	Approximation par éléments finis non-conformes anisotropes	124
4.3	Relation entre maillage anisotrope et fonction anisotrope	142
4.4	Analyse d'erreur a-posteriori	146
4.5	Conclusion	160

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étendre les résultats d'analyse d'erreur a-posteriori de type résiduel obtenus dans le chapitre 3 à une discrétisation anisotrope. Nous utilisons les mêmes éléments finis mixtes. Nous généralisons l'inégalité de Korn discrète standard de la sous-section 3.2.2 à une discrétisation anisotrope (cf. sous-section 4.2.2). Nous faisons cette extension à l'espace des fonctions affines par morceaux. Nous démontrons ainsi la stabilité du problème approché [6] via le théorème de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (cf. sous-section 4.2.3). Nous proposons ensuite une famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori, avec lesquels nous faisons une analyse d'erreur a posteriori. Ces indicateurs d'erreur que nous définissons dans la sous-section 4.4.1, généralisent ceux proposés dans le chapitre précédent. Une majoration d'erreur a-posteriori sur

la pression est prouvée dans la sous-section 4.4.2. Nous démontrons l'efficacité de ces indicateurs d'erreur [5] dans la sous-section 4.4.3, laquelle ne dépend pas du caractère anisotrope du maillage.

4.2 Approximation par éléments finis non-conformes anisotropes

Nous rappelons la formulation faible (2.146) de la section 2.7 : trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H} \times Q$ tels que,

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, p) &= L(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H} \quad , \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, q) &= G(q) & \forall q \in Q \quad , \end{cases} \quad (4.1)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &:= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) : \mathbf{v}_s \in [H^1(\Omega_s)]^N, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_d = 0 \text{ sur } \Gamma_d \right\}, \\ Q &:= L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}))_{\Omega_s} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} \langle \mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_I} + \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_d}, \\ \mathbf{b}(\mathbf{v}, q) &:= - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

4.2.1 Problème discret

• **Les espaces d'approximations :** Les espaces d'approximations sont celui du chapitre 3, i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_h &:= \left\{ \mathbf{v}_h : \mathbf{v}_{h|T} \in [\mathbb{P}^1(T)]^N \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, ([\mathbf{v}_h]_E, 1)_E = \mathbf{0} \quad \forall E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+) , \right. \\ &\quad \left. ([\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_E]_E, 1)_E = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d) \cup \mathcal{E}_h(\partial\Omega_d) \right\}, \end{aligned}$$

et,

$$Q_h := \left\{ q_h \in L_0^2(\Omega) : q_{h|T} \in \mathbb{P}^0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

• **Les formes bilinéaires approchées :** Puisque $\mathbf{H}_h \not\subseteq \mathbf{H}$, alors nous définissons les formes bilinéaires approchées \mathbf{a}_h et \mathbf{b}_h par,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= 2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} (\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}))_T + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} \langle \mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_I} \\ &+ \mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_d}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H} + \mathbf{H}_h \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{b}_h(\mathbf{v}, q) := - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (q, \operatorname{div} \mathbf{v})_T, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H} + \mathbf{H}_h, \forall q \in Q_h.$$

• **Le problème approché :** Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{H}_h \times Q_h$ tels que,

$$\begin{cases} \mathbf{a}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, p_h) + \mathbf{J}^{\text{aniso}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= L(\mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h, \\ \mathbf{b}_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= G(q_h), \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (4.2)$$

C'est aussi une discrétisation naturelle du problème faible (4.1), sauf qu'il y a un terme de pénalisation $\mathbf{J}^{\text{aniso}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ qui s'ajoute. Cette forme bilinéaire $\mathbf{J}^{\text{aniso}}(.,.)$ dans le cas anisotrope est aussi définie par décomposition suivant les éléments de \mathcal{E}_h par,

$$\mathbf{J}^{\text{aniso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{J}_{\Omega_d}^{\text{aniso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{J}_{\partial\Omega_d}^{\text{aniso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (4.3)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= (1 + 2\mu) \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+)} \frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \int_E [\mathbf{u}]_E \cdot [\mathbf{v}]_E ds, \\ \mathbf{J}_{\Omega_d}^{\text{aniso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} \frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \int_E [\mathbf{u}]_E \cdot [\mathbf{v}]_E ds \quad \text{et}, \\ \mathbf{J}_{\partial\Omega_d}^{\text{aniso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega_d)} \frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \int_E [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_E]_E \times [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_E]_E ds. \end{aligned}$$

Si l'on pose $C_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{J}^{\text{aniso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, alors le problème discret (4.2) est équivalent à : trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{H}_h \times Q_h$ tels que,

$$\begin{cases} C_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= L(\mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h, \\ \mathbf{b}_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= G(q_h), \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (4.4)$$

On pose :

$$\| \mathbf{v} \|_h := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} |\mathbf{v}|_{1,T}^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \| \mathbf{v}_s \cdot \tau_j \|_{\Gamma_I}^2 + \| \mathbf{v} \|_{\Omega_d}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \| \operatorname{div} \mathbf{v} \|_T^2 + \mathbf{J}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \right)^{1/2}.$$

Et nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.1. *L'application $\| \cdot \|_h : \mathbf{v} \in \mathbf{H}_h \mapsto \| \mathbf{v} \|_h \in \mathbb{R}_+$ est une norme sur \mathbf{H}_h .*

Preuve. La preuve est similaire à celle du Lemme 3.2. ■

4.2.2 Inégalité de Korn discrète sur une discrétisation anisotrope

Dans cette sous-section, nous généralisons l'inégalité de Korn discrète énoncée dans le Théorème 3.9 au cas d'une discrétisation anisotrope. Nous considérons en particulier l'espace des fonctions affines par morceaux. Cette inégalité de Korn discrète permet de montrer la coercivité de la forme bilinéaire C_h .

Nous rappelons les espaces :

$$V_{\mathcal{T}_h} := \{ \mathbf{v} \in [L^2(K)]^N : \mathbf{v}|_T = \mathbf{v}_T \in [\mathbb{P}^1(T)]^N, \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \quad (4.5)$$

$$[H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N := \{ \mathbf{w} \in [H^1(K)]^N : \mathbf{w}|_T = \mathbf{w}_T \in [\mathbb{P}^1(T)]^N, \forall T \in \mathcal{T}_h \}. \quad (4.6)$$

Théorème 4.2. *(Inégalité de Korn discrète-Cas anisotrope [6]) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille de triangulations anisotropes sur \bar{K} satisfaisant les Hypothèses 2.21, 2.23 et 2.24 ; et soit $\phi : [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme vérifiant les conditions (2.110) et (2.111) et, en plus, la condition :*

$$(\phi(\mathbf{v} - F\mathbf{v}))^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{K})} \frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \| [\mathbf{v}]_E \|_E^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}_h}. \quad (4.7)$$

Alors,

$$|\mathbf{v}|_{[H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N}^2 \lesssim \left(\| \mathbb{D}_{\mathcal{T}_h}(\mathbf{v}) \|_K^2 + |\phi(\mathbf{v})|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{K})} \frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \| [\mathbf{v}]_E \|_E^2 \right) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}_h}, \quad (4.8)$$

où

$$|\mathbf{v}|_{[H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N} := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{v}|_{1,T}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.9)$$

Preuve. Soit $\mathbf{v} \in V_{\mathcal{T}_h}$. On a en utilisant l'inégalité (2.113) et la définition de ϕ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2 &\leq |\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2 + |F\mathbf{v}|_{H^1(K)}^2 \\ &\lesssim \|\mathbb{D}(F\mathbf{v})\|_K^2 + (\phi(F\mathbf{v}))^2 + |\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2 \\ &\lesssim \|\mathbb{D}_{\mathcal{T}_h}(\mathbf{v})\|_K^2 + (\phi(\mathbf{v}))^2 + (\phi(\mathbf{v} - F\mathbf{v}))^2 + |\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2. \end{aligned}$$

Grâce à la condition (4.7), on a :

$$|\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2 \leq \|\mathbb{D}_{\mathcal{T}_h}(\mathbf{v})\|_K^2 + (\phi(\mathbf{v}))^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{K})} \frac{h_E}{h_{min, E}^2} \|\mathbf{v}\|_E^2 + |\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2$$

Il reste maintenant à estimer le terme $|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2$. En utilisant les inégalités inverses standard [48, 89], avec $J_T = \mathbb{A}_T$ on a :

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1, T}^2 \lesssim \|\mathbb{A}_T^{-1}\|_{\mathbb{R}^{N \times N}}^2 \times |\det(J_T)| \times |\overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}}|_{1, \bar{T}}^2, \text{ avec} \quad (4.10)$$

$$|\det(\mathbb{A}_T)| = \frac{|T|}{|\bar{T}|}. \quad (4.11)$$

Ainsi, d'après l'inégalité (2.49) du Lemme 2.17, on obtient :

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1, T}^2 \lesssim \frac{|T|}{h_{min, T}^2} \times |\overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}}|_{1, \bar{T}}^2. \quad (4.12)$$

Comme $\mathbf{v}_T - F\mathbf{v}|_T \in [\mathbb{P}^1(T)]^N$, alors l'équivalence des normes dans les espaces de dimension finie entraîne :

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1, T}^2 \lesssim \frac{|T|}{h_{min, T}^2} \times \sum_{p \in \mathcal{N}(T)} |(\mathbf{v}_T - F\mathbf{v})(p)|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (4.13)$$

D'après le Lemme 3.6, on a :

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1, T}^2 \lesssim \frac{|T|}{h_{min, T}^2} \times \sum_{p \in \mathcal{N}(T)} \sum_{E \in \mathcal{E}_p} |[\mathbf{v}]_E(p)|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (4.14)$$

Soit $\mathbf{z} = [\mathbf{v}]_E \in [\mathbb{P}^1(E)]^N \mapsto \bar{\mathbf{z}} \in [\mathbb{P}^1(\bar{E})]^N$. Restons maintenant en dimension $N = 2$ pour simplifier. Alors $\bar{E} = [0, 1]$. Pour $\bar{s} = 0$ ou 1 , on a :

$$|\mathbf{z}(s)|_{\mathbb{R}^N}^2 = |\bar{\mathbf{z}}(\bar{s})|_{\mathbb{R}^N}^2 \leq |\bar{\mathbf{z}}(0)|_{\mathbb{R}^N}^2 + |\bar{\mathbf{z}}(1)|_{\mathbb{R}^N}^2 \sim \|\bar{\mathbf{z}}\|_{\bar{E}}^2 = \frac{|\bar{E}|}{|E|} \|\mathbf{z}\|_E^2. \quad (4.15)$$

Ainsi, l'inégalité (4.14) devient :

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \lesssim \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} \sum_{E \in \mathcal{E}_s} \frac{|T|}{|E|} \times \frac{1}{h_{\min,T}^2} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_E\|_E^2. \quad (4.16)$$

Par ailleurs $h_{E,T} = \frac{N|T|}{|E|}$, donc :

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \lesssim \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} \sum_{E \in \mathcal{E}_s} \frac{h_{E,T}}{h_{\min,T}^2} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_E\|_E^2. \quad (4.17)$$

D'où,

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)} \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} \frac{h_{E,T}}{h_{\min,T}^2} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_E\|_E^2, \quad (4.18)$$

soit,

$$|\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)} \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} \frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_E\|_E^2. \quad (4.19)$$

Le théorème est ainsi démontré. ■

Remarque 4.3. Si $h_{\min,E} \sim h_E \sim \text{diam}(E)$, alors l'inégalité de Korn anisotrope (4.8) du Théorème 4.2 implique l'inégalité de Korn isotrope (3.17) du Lemme 3.7 pour les fonctions affines par morceaux. Ce qui montre que l'inégalité de Korn (4.8) est une généralisation de (3.7) pour les fonctions affines par morceaux.

Nous donnons maintenant trois exemples de semi-norme ϕ qui satisfont les différentes conditions.

Exemple 4.4. Soit $\Gamma_K \subset \partial K$ et soit $\phi : [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\phi(\mathbf{v}) := \sup_{\mathbf{m} \in \mathbf{RM}(K), \|\mathbf{m}\|_{\Gamma_K} = 1, \int_{\Gamma_K} \mathbf{m} = 0} \int_{\Gamma_K} |\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}|, \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N. \quad (4.20)$$

Proposition 4.5. ([6]) La semi-norme ϕ de l'Exemple 4.4 satisfait les conditions (2.110), (2.111) et (4.7) du Théorème 4.2.

Preuve. Nous montrons que la semi-norme ϕ de l'Exemple 4.4 satisfait les conditions (2.110), (2.111) et (4.7).

1. Condition (4.7) : La condition (4.7) est vérifiée comme suit,

$$\begin{aligned}
 (\phi(\mathbf{v} - F\mathbf{v}))^2 &\leq \| \mathbf{v} - F\mathbf{v} \|_{\partial K}^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial K)} \| \mathbf{v} - F\mathbf{v} \|_E^2 \\
 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \| \mathbf{v} - F\mathbf{v} \|_{\partial T}^2 \\
 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \| \mathbf{v} - F\mathbf{v} \|_{1,T}^2
 \end{aligned}$$

$$\| \mathbf{v} - F\mathbf{v} \|_{1,T}^2 = \| \nabla(\mathbf{v} - F\mathbf{v}) \|_T^2 + \| \mathbf{v} - F\mathbf{v} \|_T^2 \quad (4.21)$$

(a) Estimons $\| \mathbf{v} - F\mathbf{v} \|_T^2$.

$$\| \mathbf{v} - F\mathbf{v} \|_T^2 = 6 \times |T| \times \| \overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}} \|_T^2 \lesssim |T| \times \sum_{\bar{s} \in \mathcal{N}(\bar{T})} |(\overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}})(\bar{s})|_{\mathbb{R}^N}^2.$$

L'équivalence des normes dans les espaces de dimensions finies entraîne :

$$\sum_{\bar{s} \in \mathcal{N}(\bar{T})} |(\overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}})(\bar{s})|_{\mathbb{R}^N}^2 \sim \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} |(\mathbf{v} - F\mathbf{v})(s)|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (4.22)$$

Donc,

$$\| \mathbf{v} - F\mathbf{v} \|_T^2 \lesssim |T| \times \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} |(\mathbf{v} - F\mathbf{v})(s)|_{\mathbb{R}^N}^2.$$

D'après le Lemme 3.6, on a

$$\| \mathbf{v} - F\mathbf{v} \|_T^2 \lesssim |T| \times \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} \sum_{E \in \mathcal{E}_s} |[\mathbf{v}]_E(s)|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (4.23)$$

On se ramène maintenant à l'élément de référence. Pour simplifier, on se place en dimension $N = 2$. Soit donc $\mathbf{z} = [\mathbf{v}]_E \in [\mathbb{P}^1(E)]^N \mapsto \bar{\mathbf{z}} \in [\mathbb{P}^1(\bar{E})]^N$, avec $\bar{E} = [0, 1]$ (pour $N = 2$).

$$|\mathbf{z}(s)|_{\mathbb{R}^N} = |\bar{\mathbf{z}}(\bar{s})|_{\mathbb{R}^N} \leq |\bar{\mathbf{z}}(0)|_{\mathbb{R}^N} + |\bar{\mathbf{z}}(1)|_{\mathbb{R}^N} \sim \| \bar{\mathbf{z}} \|_{\bar{E}}. \quad (4.24)$$

En utilisant (2.51), on a :

$$|\mathbf{z}(s)|_{\mathbb{R}^N} \lesssim |E|^{1/2} \times \|\mathbf{z}\|_E \text{ i.e. } |[\mathbf{v}]_E(s)|_{\mathbb{R}^N} \lesssim |E|^{-1/2} \times \|[\mathbf{v}]_E\|_E.$$

Donc,

$$\|\mathbf{v} - F\mathbf{v}\|_T^2 \lesssim \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} \sum_{E \in \mathcal{E}_s} \frac{|T|}{|E|} \|[\mathbf{v}]_E\|_E^2 \quad (4.25)$$

$$h_{E,T} = \frac{N|T|}{|E|} \quad \text{et} \quad 1 \lesssim \frac{1}{h_{min,T}}. \quad (4.26)$$

Donc,

$$\|\mathbf{v} - F\mathbf{v}\|_T^2 \lesssim \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} \sum_{E \in \mathcal{E}_s} \frac{h_{E,T}}{h_{min,T}^2} \|[\mathbf{v}]_E\|_E^2. \quad (4.27)$$

Aussi,

$$h_{E,T} \leq h_E \quad \text{et} \quad h_{min,T} \sim h_{min,E}. \quad (4.28)$$

Donc,

$$\|\mathbf{v} - F\mathbf{v}\|_T^2 \lesssim \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} \sum_{E \in \mathcal{E}_s} \frac{h_E}{h_{min,E}^2} \|[\mathbf{v}]_E\|_E^2 \quad (4.29)$$

D'où,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v} - F\mathbf{v}\|_T^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{K})} \frac{h_E}{h_{min,E}^2} \|[\mathbf{v}]_E\|_E^2. \quad (4.30)$$

(b) Estimons $\|\nabla(\mathbf{v} - F\mathbf{v})\|_T^2$. Nous avons les égalités :

$$\nabla(\mathbf{v} - F\mathbf{v}) = \mathbb{A}_T^{-T} \cdot \overline{\nabla(\mathbf{v} - F\mathbf{v})}, \text{ et}$$

$$F_T(\bar{x}) = \mathbb{A}_T \cdot \bar{x} + \vec{P}_0 = x \text{ et } dx = J_{F_T} \cdot d\bar{x}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\| \nabla(\mathbf{v} - F\mathbf{v}) \|_T &= |J_{F_T}| \times \int_{\bar{T}} |\mathbb{A}_T^{-T} \cdot \bar{\nabla}(\overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}})|^2 d\bar{x} \\
&\leq |J_{F_T}| \times \| \mathbb{A}_T^{-T} \|_{\mathbb{R}^{N \times N}}^2 \times |\overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}}|_{1,\bar{T}}^2 \\
&\leq \frac{|T|}{h_{min,T}^2} \times |\overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}}|_{1,\bar{T}}^2 \leq \frac{|T|}{h_{min,T}^2} \times \| \overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}} \|_{1,\bar{T}}^2.
\end{aligned}$$

L'équivalence des normes dans les espaces de dimensions finies entraîne :

$$\sum_{s \in \mathcal{N}(T)} |(\mathbf{v} - F\mathbf{v})(s)|_{\mathbb{R}^N} \sim \| \overline{\mathbf{v} - F\mathbf{v}} \|_{1,\bar{T}}. \quad (4.31)$$

Donc,

$$\| \nabla(\mathbf{v} - F\mathbf{v}) \|_T^2 \lesssim \frac{|T|}{h_{min,T}^2} \times \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} |(\mathbf{v} - F\mathbf{v})(s)|_{\mathbb{R}^N}^2 \quad (4.32)$$

D'après le Lemme 3.6, on a

$$\| \nabla(\mathbf{v} - F\mathbf{v}) \|_T^2 \lesssim \frac{|T|}{h_{min,T}^2} \times \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} \sum_{E \in \mathcal{E}_s} |[\mathbf{v}]_E(s)|_{\mathbb{R}^N}^2 \quad (4.33)$$

En utilisant la même technique que précédemment, on obtient :

$$\| \nabla(\mathbf{v} - F\mathbf{v}) \|_T^2 \lesssim \frac{|T|}{h_{min,T}^2} \times \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} \sum_{E \in \mathcal{E}_s} \frac{|T|}{|E|} \times \frac{1}{h_{min,T}^2} \| [\mathbf{v}]_E \|_E^2$$

Soit,

$$\| \nabla(\mathbf{v} - F\mathbf{v}) \|_T^2 \lesssim \frac{|T|}{h_{min,T}^2} \times \sum_{s \in \mathcal{N}(T)} \sum_{E \in \mathcal{E}_s} \frac{h_{E,T}}{h_{min,T}^2} \| [\mathbf{v}]_E \|_E^2$$

D'où,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{K})} \frac{h_E}{h_{min,E}^2} \| [\mathbf{v}]_E \|_E^2 \quad (4.34)$$

Les estimés (4.30) et (4.34) conduisent à l'estimé (4.7).

2. Les conditions (2.110) et (2.111) ne dépendent pas de la discrétisation. Elles sont

vérifiées dans [35].

■

Exemple 4.6. Soit $\phi : [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\phi(\mathbf{v}) := \|\mathcal{Q}\mathbf{v}\|_K, \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N, \quad (4.35)$$

avec,

$$\mathcal{Q}\mathbf{v} := \mathbf{v} - \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{v}. \quad (4.36)$$

Proposition 4.7. ([6]) La semi-norme ϕ de l'Exemple 4.6 vérifie les conditions (2.110), (2.111) et (4.7) du Théorème 4.2.

Preuve. Nous montrons que la semi-norme ϕ satisfait les conditions (2.110), (2.111) et (4.7).

1. Condition (4.7). On a :

$$(\phi(\mathbf{v} - F\mathbf{v}))^2 \lesssim \|\mathbf{v} - F\mathbf{v}\|_K^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v} - F\mathbf{v}\|_T^2, \quad (4.37)$$

et l'estimation (4.7) suit, d'après l'estimé (4.30).

2. Conditions (2.110) et (2.111).

(a) Condition (2.110). Pour tout $\mathbf{v} \in [H^1(K)]^N$, on a,

$$\begin{aligned} (\phi(\mathbf{v})) &= \left\| \mathbf{v} - \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{v} \right\|_K \leq \|\mathbf{v}\|_K + \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \mathbf{v} \right\|_K \\ &\leq \|\mathbf{v}\|_K + \frac{1}{|K|} \left(|K|^{1/2} \times \left\| \int_K \mathbf{v} \right\| \right) \\ &\leq \|\mathbf{v}\|_K + \frac{1}{|K|} (|K|^{1/2} \times |K|^{1/2} \|\mathbf{v}\|_K) \end{aligned}$$

D'où,

$$\phi(\mathbf{v}) \leq 2 \|\mathbf{v}\|_{1,K} \quad (4.38)$$

(b) Condition (2.111). La condition nécessaire est triviale d'après les équivalences (2.109) et (2.112); la condition suffisante est aussi triviale à cause de l'équivalence (4.39) ci-dessous et $\mathbb{D}(\mathbf{c})$ est une matrice nulle pour tout

vecteur constant $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$.

$$(\mathbf{Q}\mathbf{v} = 0 \text{ dans } K) \iff \mathbf{v} = \left(\frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{v} \right) \in \mathbb{R}^N. \quad (4.39)$$

■

Exemple 4.8. La semi-norme ϕ est définie par $\phi : [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que,

$$\phi(\mathbf{v}) := \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{rot}(\mathbf{v}) \right|_{\mathbb{R}^N}, \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(K, \mathcal{T}_h)]^N. \quad (4.40)$$

Proposition 4.9. ([6]) La semi-norme ϕ de l'Exemple 4.8 satisfait les conditions (2.110), (2.111) et (4.7) du Théorème 4.2.

Preuve. Nous montrons que la semi-norme ϕ vérifie les conditions (2.110), (2.111) et (4.7).

1. Condition (4.7). On a

$$(\phi(\mathbf{v} - F\mathbf{v}))^2 \lesssim |\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{H^1(K, \mathcal{T}_h)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{v} - F\mathbf{v}|_{1,T}^2, \quad (4.41)$$

et l'estimation (4.7) suit d'après l'estimé (4.34).

2. Conditions (2.110) et (2.111).

- (a) La condition (2.110) est vérifiée pour tout $\mathbf{v} \in [H^1(K)]^N$ dans [35].
- (b) La condition nécessaire et suffisante de la condition (2.111) est aussi vérifiée dans [35].

■

4.2.3 Existence et l'unicité d'une solution du problème discret

Nous pouvons maintenant prouver l'existence et l'unicité d'une solution du problème discret (4.4). Pour cela, nous allons vérifier les hypothèses du théorème de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi : la continuité des formes discrètes, la coercivité de la forme bilinéaire C_h sur le noyau discret $\text{Ker}_h b_h$ et la condition inf-sup discrète de la forme bilinéaire discrète \mathbf{b}_h par rapport à la norme $\|\cdot\|_h$.

Continuité des formes discrètes

Lemme 4.10. ([6]) *On a les estimations suivantes :*

$$|L(\mathbf{v}_h)| \lesssim \|\mathbf{v}_h\|_h, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h + \mathbf{H}, \quad (4.42)$$

$$|G(q_h)| \lesssim \|q_h\|, \quad \forall q_h \in Q_h, \quad (4.43)$$

$$|C_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| \lesssim \|\mathbf{u}_h\|_h \times \|\mathbf{v}_h\|_h, \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h + \mathbf{H}, \quad (4.44)$$

$$|\mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h)| \lesssim \|\mathbf{v}_h\|_h \times \|q_h\|, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h + \mathbf{H}, \forall q_h \in Q_h. \quad (4.45)$$

Preuve. Ces estimations suivent immédiatement l'inégalité de Hölder. ■

Coercivité de la forme bilinéaire C_h

On introduit l'espace discret,

$$\mathbf{Z}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h : \mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h\}. \quad (4.46)$$

Lemme 4.11. ([6]) *Si $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$, alors $\operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0$ p.p dans T , $\forall T \in \mathcal{T}_h$.*

Preuve. La preuve est exactement celle du Lemme 3.11. ■

Théorème 4.12. (*Coercivité discrète* [6]) *On suppose que la triangulation \mathcal{T}_h sur $\overline{\Omega}$ est anisotrope et satisfait les Hypothèses 2.21 à 2.24. Alors, il existe une constante c_h dépendant de h telle que,*

$$C_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \gtrsim c_h \|\mathbf{v}_h\|_h^2, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h. \quad (4.47)$$

Preuve. Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$. On a,

$$\begin{aligned} C_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &= 2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\mathbb{D}(\mathbf{v}_h)\|_T^2 + \mu(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega_d} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\kappa_j} \|\mathbf{v}_h \cdot \tau_j\|_{\Gamma_I}^2 \\ &+ \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{J}_{\Omega_d}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{J}_{\partial\Omega_d}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Considérons maintenant la semi-norme ϕ définie ci-dessus par,

$$\phi(\mathbf{v}_h) = \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \int_T \mathbf{rot} \mathbf{v}_h \right|_{\mathbb{R}^N}. \quad (4.48)$$

Rappelons que $\mathbf{rot} \mathbf{v}_h$ est une fonction scalaire constante ($N = 2$) ou une fonction

vectorielle constante ($N = 3$) dans chaque $T \in \mathcal{T}_h$, donc,

$$\phi(\mathbf{v}_h) = \left| \int_{\Omega_s} \mathbf{rot} \mathbf{v}_h \right|_{\mathbb{R}^N} \quad (4.49)$$

$$= \left| \int_{\partial\Omega_s} \gamma_\tau(\mathbf{v}_h) \right|_{\mathbb{R}^N} \quad (\text{formule de Green (2.96)}) \quad (4.50)$$

$$\leq \int_{\Gamma_s} |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N} + \int_{\Gamma_I} |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N} \quad (4.51)$$

$$\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}. \quad (4.52)$$

• Estimons $\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}$. On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N} &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \left(\int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2} \times |\text{diam}(E)|^{1/2} \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \left(\int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2} \quad (\text{car } \text{diam}(E) \leq 1) \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \left(\frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \right)^{1/2} \left(\int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2} \times \left(\frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \right)^{-1/2} \\ &\leq \left\{ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \left(\frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \right) \left(\int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right) \right\}^{1/2} \times \\ &\times \left\{ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \left(\frac{h_{\min,E}^2}{h_E} \right) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

En posant,

$$m_h = \left\{ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \left(\frac{h_{\min,E}^2}{h_E} \right) \right\}^{1/2} \in \mathbb{R}, \quad (4.53)$$

on a,

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \int_T |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)| \leq m_h \times \left\{ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \left(\frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \right) \left(\int_E |[\mathbf{v}_h]_E|_{\mathbb{R}^N}^2 \right) \right\}^{1/2}. \quad (4.54)$$

D'où,

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_s)} \int_T |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N} \lesssim m_h \times \left(\mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \right)^{1/2}. \quad (4.55)$$

• Estimons maintenant $\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N}$. On a par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)} \int_E |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|_{\mathbb{R}^N} &\leq \left(\int_{\Gamma_I} |\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)|^2 \right)^{1/2} \times \text{diam}(\Gamma_I)^{1/2} \\ &\lesssim \mathbf{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Avec les estimés (4.55) et (4.56), on a l'estimation :

$$(\phi(\mathbf{v}_h))^2 \lesssim m_h \times \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \quad (4.57)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} m_h \times \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\mathbb{D}(\mathbf{v}_h)\|_T^2 &\gtrsim \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\mathbb{D}(\mathbf{v}_h)\|_T^2 + (\phi(\mathbf{v}_h))^2 \\ &\quad + \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer l'inégalité de Korn discrète anisotrope du Théorème 4.2 au second membre de cette inégalité. On a alors,

$$m_h \times \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\mathbb{D}(\mathbf{v}_h)\|_T^2 \gtrsim \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\nabla(\mathbf{v}_h)\|_T^2 \quad (4.58)$$

D'où, il existe une constante $c_h > 0$ telle que,

$$\mathbf{J}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\mathbb{D}(\mathbf{v}_h)\|_T^2 \geq c_h \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\nabla(\mathbf{v}_h)\|_T^2 + \mathbf{J}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \right\},$$

soit,

$$C_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq c_h \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \|\nabla(\mathbf{v}_h)\|_T^2 + \mathbf{J}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \right\}. \quad (4.59)$$

Par ailleurs,

$$C_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \sum_{j=1}^{N-1} \|\mathbf{v}_h \cdot \tau_j\|_{\Gamma_I}^2, \quad (4.60)$$

$$C_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \|\mathbf{v}_h\|_{\Omega_d}^2. \quad (4.61)$$

Les estimés (4.59), (4.60) et (4.61) conduisent à l'estimé du théorème et donc, le théorème est complètement démontré.

■

Condition inf-sup de la forme bilinéaire \mathbf{b}_h

Nous montrons maintenant la condition inf-sup de la forme bilinéaire \mathbf{b}_h sur $\mathbf{H}_h \times Q_h$. Mais avant, nous introduisons l'espace :

$$\mathbf{X} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H} : \mathbf{v}|_{\Omega_d} \in [H^1(\Omega_d)]^N\}. \quad (4.62)$$

Nous définissons ensuite l'opérateur d'interpolation de Crouzeix-Raviart $\mathbb{I}_h : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{H}_h$ par :

$$\int_E \mathbf{v} = \int_E \mathbb{I}_h \mathbf{v}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \forall E \in \mathcal{E}(T). \quad (4.63)$$

Lemme 4.13. ([12]) *L'opérateur \mathbb{I}_h est $[H^1]^N$ - stable, c'est-à-dire,*

$$|\mathbb{I}_h \mathbf{v}|_{1,T} \lesssim |\mathbf{v}|_{1,T}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (4.64)$$

Théorème 4.14. (*Condition inf-sup discrète [6]*) *On suppose que la triangulation \mathcal{T}_h sur $\overline{\Omega}$ est anisotrope et satisfait les Hypothèses 2.21 à 2.24. Alors, la forme bilinéaire \mathbf{b}_h vérifie la condition inf-sup discrète sur $\mathbf{H}_h \times Q_h$, c'est-à-dire : $\exists \alpha_h > 0$ telle que,*

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h} \frac{\mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|q_h\| \times \|\mathbf{v}_h\|_h} \geq \alpha_h. \quad (4.65)$$

Preuve. On utilise toujours l'argument de Fortin comme dans la preuve du Lemme 3.14. Soit $q_h \in Q_h$. Alors [67, Corollaire 2.4, Page 24], il existe une fonction vectorielle $\mathbf{v}_h \in [H_0^1(\Omega)]^N \subset \mathbf{X}$ telle que,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} &= -q_h, \text{ dans } \Omega \\ \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} &\lesssim \|q_h\|_{\Omega}. \end{cases} \quad (4.66)$$

Prenons $\mathbf{v}_h = \mathbb{I}_h \mathbf{v} \in \mathbf{H}_h$. On a,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, q_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} \int_E q_h \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} \int_E \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) = 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbf{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h) = \mathbf{b}_h(\mathbf{v}, q_h) = \|q_h\|^2 \gtrsim \|q_h\| \times \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}. \quad (4.67)$$

Ainsi, pour avoir la condition inf-sup (4.65), il suffit que,

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \gtrsim \|\mathbf{v}_h\|_h. \quad (4.68)$$

Montrons alors l'estimé (4.68). Nous commençons par majorer chaque terme de la norme $\|\mathbf{v}_h\|_h^2$:

- Majoration du terme $\sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} |\mathbf{v}_h|_{1,T}^2$. On a, en utilisant le Lemme 4.13,

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \gtrsim |\mathbf{v}|_{1,\Omega_s}^2 \gtrsim \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} |\mathbf{v}_h|_{1,T}^2. \quad (4.69)$$

- Majoration du terme $\sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_T^2$. On obtient via le Lemme 4.13 :

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \sim |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{v}|_{1,T}^2 \gtrsim \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} |\mathbf{v}|_{1,T}^2 \gtrsim \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_T^2. \quad (4.70)$$

- Majoration du terme $\|\mathbf{v}_h\|_{\Omega_d}^2$. Soit une fonction scalaire $\bar{v} \in H^1(\bar{T})$. Définissons l'opérateur $\bar{I}_h : H^1(\bar{T}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\bar{T})$ par,

$$\bar{I}_h \bar{v} := \overline{I_h v} := \sum_{i=0}^N \left(\frac{1}{|\bar{E}_i|} \int_{\bar{E}_i} \bar{v} \right) \bar{\psi}_i, \quad \text{avec } \bar{\psi}_i := 1 - N \bar{\lambda}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.71)$$

Précisons que les $\bar{\psi}_i$ sont les fonctions de forme de l'élément fini de référence $\mathbb{P}^1(\bar{T})$ de Crouzeix-Raviart définies ci-dessus. On a les estimations,

$$\begin{aligned}
\| \bar{I}_h \bar{v} \|_T^2 &\lesssim \sum_{i=0}^N \left| \left(\frac{1}{|\bar{E}_i|} \int_{\bar{E}_i} \bar{v} \right) \right|^2 \times \| \bar{\psi} \|_T^2, \\
&\lesssim \sum_{i=0}^N \left(\frac{1}{|\bar{E}_i|} \right) \times \| \bar{v} \|_{\bar{E}_i}^2 \times \| \bar{\psi} \|_T^2 \\
&\lesssim \sum_{i=0}^N \times \| \bar{v} \|_{\bar{E}_i}^2 .
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\| \bar{v} \|_{\bar{E}_i}^2 = \frac{|\bar{E}_i|}{|E_i|} \times \| v \|_{E_i}^2, \quad (4.72)$$

donc,

$$\begin{aligned}
\| \bar{I}_h \bar{v} \|_T^2 &\lesssim \sum_{i=0}^N \frac{|\bar{E}_i|}{|E_i|} \times \| v \|_{E_i}^2 \\
&\lesssim \sum_{i=0}^N \frac{1}{|E_i|} \times \| v \|_{E_i}^2 \\
&\lesssim \sum_{i=0}^N \frac{h_{E_i,T}}{|T|} \times \| v \|_{E_i}^2 \\
&\lesssim \sum_{i=0}^N \frac{h_{max,T}}{|T|} \times \| v \|_T^2 .
\end{aligned}$$

Or,

$$\| \bar{I}_h v \|_T^2 = \frac{\| I_h v \|_T^2}{6|T|}, \quad (4.73)$$

donc,

$$\| I_h v \|_T^2 \lesssim h_{max,T} \| v \|_T^2 . \quad (4.74)$$

Ainsi, pour une fonction vectorielle $\mathbf{v} \in [H^1(T)]^N$, on a :

$$\| \mathbb{I}_h \mathbf{v} \|_T^2 \lesssim h_{max,T} \| \mathbf{v} \|_T^2 . \quad (4.75)$$

On peut alors conclure qu'il existe une constante $\alpha_{1,h} > 0$ dépendant de h telle que,

$$\| \mathbf{v} \|_{\Omega_d}^2 \geq \alpha_{1,h} \| \mathbf{v}_h \|_{\Omega_d}^2. \quad (4.76)$$

- Majoration du terme $\sum_{j=1}^{N-1} \| \mathbf{v}_{s,h} \cdot \tau_j \|_{\Gamma_I}^2$. Soit $E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)$. On a,

$$\begin{aligned} \| \mathbf{v}_{s,h} \cdot \tau_j \|_E^2 &\lesssim \| \mathbf{v}_{s,h} \|_E^2, \quad (\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}), \\ &\lesssim \| \mathbf{v}_{s,h} - \mathbf{v} \|_E^2 + \| \mathbf{v} \|_E^2, \quad (\text{Inégalité triangulaire}). \end{aligned}$$

En utilisant la première inégalité de trace anisotrope (Lemme 2.35), on obtient,

$$\| \mathbf{v}_{s,h} \cdot \tau_j \|_E^2 \lesssim [h_E^{-1} (\| \mathbf{v}_h - \mathbf{v} \|_T^2 + \| \mathbb{C}_T^{Tr} \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \|_T^2) + \| \mathbf{v} \|_E^2]. \quad (4.77)$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de la matrice \mathbb{C}_T conduisent aux estimations :

$$\| \mathbf{v}_{s,h} \cdot \tau_j \|_E^2 \lesssim [h_E^{-1} (\| \mathbf{v}_h - \mathbf{v} \|_T^2 + h_{max,T}^2 \| \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \|_T^2) + \| \mathbf{v} \|_E^2] \quad (4.78)$$

$$\lesssim h_E^{-1} \| \mathbf{v}_h - \mathbf{v} \|_T^2 + \frac{h_{max,T}^2}{h_E} \| \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \|_T^2 + \| \mathbf{v} \|_{1,\Omega_s}^2. \quad (4.79)$$

On utilise l'estimé (4.75) pour obtenir,

$$\| \mathbf{v}_{s,h} \cdot \tau_j \|_E^2 \lesssim \frac{h_{max,T}}{h_E} \| \mathbf{v} \|_T^2 + \frac{h_{max,T}^2}{h_E} \| \mathbf{v} \|_{1,T}^2 + \| \mathbf{v} \|_{1,\Omega_s}^2. \quad (4.80)$$

D'où il existe une constante $\alpha_{2,h} > 0$ dépendant de h telle que,

$$\| \mathbf{v} \|_{1,\Omega}^2 \gtrsim \alpha_{2,h} \times \sum_{j=1}^{N-1} \| \mathbf{v}_{s,h} \cdot \tau_j \|_{\Gamma_I}^2. \quad (4.81)$$

- Il reste maintenant à contrôler le terme $\mathbf{J}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)$. D'abord, remarquons que $\mathbf{J}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$, puisque $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^N$.

★ Estimons $\mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)$.

$$\mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbf{J}_{T \cap \Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h), \text{ avec}$$

$$\mathbf{J}_{T \cap \Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = (1 + 2\mu) \sum_{E \in \mathcal{E}_h(T \cap \Omega_s^+)} \left(\frac{h_E}{h_{min,E}^2} \right) \| [\mathbf{v}_h]_E \|_E^2.$$

$$\mathbf{J}_{T \cap \Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \mathbf{J}_{T \cap \Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}, \mathbf{v}_h - \mathbf{v}) \quad (4.82)$$

$$= (1 + 2\mu) \sum_{E \in \mathcal{E}_h(T \cap \Omega_s^+)} \left(\frac{h_E}{h_{\min, E}^2} \right) \|\mathbf{v}_h - \mathbf{v}\|_E^2. \quad (4.83)$$

En utilisant la continuité de l'opérateur trace et l'inégalité de trace du Lemme 2.35, on obtient,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{T \cap \Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(T \cap \Omega_s^+)} \left(\frac{1}{h_{\min, E}^2} \right) \times (\|\mathbf{v}_h - \mathbf{v}\|_T^2 + h_{\max, T}^2 |\mathbf{v}_h - \mathbf{v}|_{1, T}^2) \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(T \cap \Omega_s^+)} \left(\frac{1}{h_{\min, T}^2} \right) \times (\|\mathbf{v}_h - \mathbf{v}\|_T^2 + h_{\max, T}^2 |\mathbf{v}_h - \mathbf{v}|_{1, T}^2). \end{aligned}$$

On utilise maintenant les estimés (4.64) et (4.75), pour avoir :

$$\mathbf{J}_{T \cap \Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(T \cap \Omega_s^+)} \left(\frac{1}{h_{\min, T}^2} \right) \times (h_{\max, T} \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega_s}^2 + h_{\max, T}^2 \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega_s}^2),$$

soit,

$$\mathbf{J}_{T \cap \Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_h(T \cap \Omega_s^+)} \left(\frac{h_{\max, T}}{h_{\min, T}^2} \right) \times (\|\mathbf{v}\|_{1, \Omega_s}^2 + \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega_s}^2).$$

Ainsi, en sommant sur les éléments de \mathcal{T}_h^s , il en résulte l'existence d'une constante $\alpha_{3, h} > 0$, telle que,

$$\|\mathbf{v}\|_{1, \Omega}^2 \gtrsim \alpha_{3, h} \times \mathbf{J}_{\Omega_s^+}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \quad (4.84)$$

★ Par la même technique, on majore les autres termes $\mathbf{J}_{\Omega_d}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)$ et $\mathbf{J}_{\partial \Omega_d}^{\text{aniso}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)$ et le Théorème 4.14 est complètement démontré. ■

Le Lemme 4.12, le Théorème 4.14 et le Théorème 4.10 conduisent au résultat suivant,

Corollaire 4.15. ([6]) *On suppose que la triangulation \mathcal{T}_h sur $\bar{\Omega}$ est anisotrope et satisfait les Hypothèses 2.21 à 2.24. Alors, le problème discret (4.2) admet une solution et une seule dans $\mathbf{H}_h \times Q_h$.*

Remarque 4.16. *La constante intervenant dans la condition inf-sup (4.65) de \mathbf{b}_h sur $\mathbf{H}_h \times Q_h$ n'est pas uniforme en h . Cela n'est pas un inconvénient pour faire une analyse d'erreur a-posteriori.*

4.3 Relation entre maillage anisotrope et fonction anisotrope

4.3.1 Mesures d'alignements

Les mesures d'alignements constituent un dernier outil que nous décrivons. Ces mesures d'alignements permettent de caractériser l'alignement d'une solution avec une discrétisation donnée.

Définition 4.17. (*Mesures d'alignements*)

1. Pour une fonction v dans $H^1(\Omega_l)$ non constante, on définit la mesure d'alignement de v avec les \mathcal{T}_h^l , $l = s$ ou d par [52, 84, 90] :

$$m_1(v, \mathcal{T}_h^l) := \frac{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^l} h_{min,T}^{-2} \| \mathbb{C}_T^{Tr} \nabla v \|_T^2 \right)^{1/2}}{\| \nabla v \|_{\Omega_l}}. \quad (4.85)$$

2. Pour $\psi \in [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ non constante, on définit également la mesure d'alignement $m_2(.,.)$ par [90] :

$$m_2(\psi, \mathcal{T}_h^d) := \frac{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} h_{min,T}^{-4} \| \nabla(\mathbb{C}_T^{Tr} \psi) \mathbb{C}_T \|_T^2 \right)^{1/2}}{\| \nabla \psi \|_{\Omega_d}}. \quad (4.86)$$

3. Puisque la mesure d'alignement définie en (4.85) est aussi valable pour les fonctions vectorielles dans $[H^1(\Omega_l)]^N$, alors pour une fonction $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N$, on définit la mesure d'alignement $m(\mathbf{v}, \psi, \mathcal{T}_h)$ par [5] :

$$m(\mathbf{v}, \psi, \mathcal{T}_h) := \begin{cases} m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h^s) + m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h^d) + m_1(\psi, \mathcal{T}_h^d) & \text{si } \psi \in H_0^1(\Omega_d), \\ m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h^s) + m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h^d) + m_2(\psi, \mathcal{T}_h^d) & \text{si } \psi \in \mathcal{H}, \end{cases} \quad (4.87)$$

où,

$$\mathcal{H} := [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d). \quad (4.88)$$

4.3.2 Propriétés sur les mesures d'alignements

Nous donnons maintenant quelques propriétés sur les mesures d'alignements :

Lemme 4.18. *On suppose que les triangulations \mathcal{T}_h^l sur $\overline{\Omega}_l$ sont anisotropes. Alors, nous avons les propriétés suivantes pour les mesures d'alignements,*

1. *Les mesures d'alignements $m_1(v, \mathcal{T}_h^l)$, $l = s$ ou d vérifient :*

$$1 \leq m_1(v, \mathcal{T}_h^l) \lesssim \max_{T \in \mathcal{T}_h^l} \frac{h_{\max, T}}{h_{\min, T}}. \quad (4.89)$$

2. *De même, la mesure d'alignement $m_2(\psi, \mathcal{T}_h^d)$ vérifie :*

$$1 \leq m_2(\psi, \mathcal{T}_h^d) \lesssim \max_{T \in \mathcal{T}_h^d} \frac{h_{\max, T}}{h_{\min, T}} \quad (4.90)$$

où $h_{\max, T}$ est égal au plus grand $h_{1, T}$ de la triangulation.

Preuve. Raisonnons dans le cas où v est une fonction scalaire. Rappelons les matrices \mathbb{H}_T et \mathbb{M}_T de $\mathbb{R}^{N \times N}$ par :

$$\mathbb{H}_T = \text{diag}(h_{1, T}, \dots, h_{N, T}) \text{ et } \mathbb{M}_T = \mathbb{H}_T^{-1} \mathbb{C}_T^{Tr}. \quad (4.91)$$

Comme les vecteurs anisotropes $\mathbf{p}_{i, T}$ sont deux-à-deux orthogonaux, alors les vecteurs lignes de la matrice carrée \mathbb{M}_T sont deux-à-deux orthogonaux. De plus ces vecteurs lignes sont unitaires. Donc la matrice \mathbb{M}_T est une matrice orthogonale. Ce qui implique l'identité :

$$\| \mathbb{M}_T \cdot \nabla v \|_T = \| \nabla v \|_T \quad (4.92)$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{M}_T \cdot \nabla v = (h_{1, T}^{-1} \mathbf{p}_{1, T} \cdot \nabla v, \dots, h_{N, T}^{-1} \mathbf{p}_{N, T} \cdot \nabla v). \quad (4.93)$$

Alors, on utilise le fait que $h_{i, T}^{-1} \leq h_{\min, T}^{-1}$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, pour avoir l'inégalité

$$\| \mathbb{M}_T \cdot \nabla v \|_T \leq h_{N, T}^{-1} \| \mathbb{C}_T^{Tr} \nabla v \|_T \quad (4.94)$$

Par (4.92) et par le fait que $\nabla v \in [L^2(\Omega)]^N$, on a :

$$\| \nabla v \|_\Omega^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \| \nabla v \|_T^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_{\min, T}^{-2} \| \mathbb{C}_T^{Tr} \nabla v \|_T^2 \quad (4.95)$$

D'où la première borne de (4.89). Maintenant prouvons la deuxième borne. On a

$$\mathbb{C}_T^{Tr} \nabla v = (\mathbf{p}_{1,T} \cdot \nabla v, \dots, \mathbf{p}_{N,T} \cdot \nabla v) \quad (4.96)$$

Donc

$$\| \mathbb{C}_T^{Tr} \nabla v \|_T = \sum_{i=1}^N \| \mathbf{p}_{i,T} \cdot \nabla v \|_T \quad (4.97)$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\| \mathbb{C}_T^{Tr} \nabla v \|_T \leq \left(\sum_{i=1}^N \| \mathbf{p}_{i,T} \|_T \right) \times \| \nabla v \|_T \quad (4.98)$$

$$\leq N \times h_{max,T} \times \| \nabla v \|_T \quad (4.99)$$

Ainsi,

$$\frac{\| \mathbb{C}_T \nabla v \|_T}{h_{min,T}} \leq N \times \frac{h_{max,T}}{h_{min,T}} \times \| \nabla v \|_T. \quad (4.100)$$

$$\leq N \times \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_{max,T}}{h_{min,T}} \times \| \nabla v \|_T. \quad (4.101)$$

En sommant sur \mathcal{T}_h , on retrouve la seconde borne de (4.89). Par un raisonnement similaire, on prouve les bornes de (4.90) ■

Lemme 4.19. (*Cas particulier où le maillage est isotrope*) On suppose que la famille $\{\mathcal{T}_h\}_{\{h>0\}}$ de triangulations de Ω est isotrope. Alors,

$$m_i(v, \mathcal{T}_h) \sim 1, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.102)$$

Preuve. Rappelons que dans le cas d'un maillage isotrope (voir Fig. 2.8 ci-dessus), on définit

$$\sigma_h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\rho_T}, \quad \text{où } \rho_T = 2r_T. \quad (4.103)$$

L'isotropie du maillage est caractérisée par l'existence d'un $\sigma_0 > 0$ indépendant du pas h tel que :

$$\sigma_h \leq \sigma_0, \quad \forall h > 0. \quad (4.104)$$

Comme $h_T \geq h_{\max,T}$ et $\rho_T \leq h_{\min,T}$, alors l'inégalité (4.105) ci-dessous tient :

$$\frac{h_{\max,T}}{h_{\min,T}} \leq \frac{h_T}{h_{\min,T}} \leq \frac{h_T}{\rho_T}. \quad (4.105)$$

Ainsi, grâce au Lemme 4.18 et à l'hypothèse de régularité (4.104), on déduit l'équivalence :

$$1 \leq m_i(v, \mathcal{T}_h) \lesssim \sigma_0, \quad (4.106)$$

ou encore,

$$m_i(v, \mathcal{T}_h) \sim 1. \quad (4.107)$$

■

Remarque 4.20. Le Lemme 4.19 montre que les mesures d'alignements sont des extensions des cas isotropes.

Remarque 4.21. (Commentaire sur la mesure d'alignement) : Rappelons que,

$$\mathbb{C}_T^{\text{Tr}} \nabla v = (\mathbf{p}_{1,T} \cdot \nabla v, \dots, \mathbf{p}_{N,T} \cdot \nabla v). \quad (4.108)$$

Pour un maillage anisotrope, les termes $\mathbb{C}_T^{\text{Tr}} \nabla v$ contiennent des dérivées selon les directions d'anisotropie $\mathbf{p}_{i,T}$ de l'élément T . Si les éléments anisotropes sont alignés avec une fonction anisotrope v , la direction d'anisotropie la plus longue $\mathbf{p}_{1,T}$ est associée avec une faible dérivée dans cette direction $\mathbf{p}_{1,T} \cdot \nabla v$. Inversement, la direction d'anisotropie la plus courte $\mathbf{p}_{N,T}$ est associée avec une forte dérivée dans cette direction $\mathbf{p}_{N,T} \cdot \nabla v$. En conséquence le numérateur et le dénominateur de $m_1(v, \mathcal{T}_h)$ se compensent et $m_1(v, \mathcal{T}_h) \sim 1$. Si en revanche, le maillage anisotrope n'est pas aligné avec une fonction anisotrope v , alors des considérations similaires impliquent que $m_1(v, \mathcal{T}_h) \gg 1$. On a une interprétation analogue avec la seconde mesure d'alignement. En conclusion, mieux le maillage \mathcal{T}_h est aligné avec la fonction anisotrope v , plus les mesures d'alignement $m_i(v, \mathcal{T}_h)$ seront petites. Ce qui aura pour conséquence, comme nous le verrons dans la sous-section 4.3.3, l'obtention d'estimations d'erreurs d'interpolation plus fines.

4.3.3 Estimations d'interpolation de Clément-Cas anisotrope

Nous donnons ici les estimations d'interpolation de Clément dans le cas anisotrope. Ces estimations généralisent celles données dans le Lemme 2.30 du chapitre 2 ci-dessus.

Lemme 4.22. (*Estimations d'interpolation de Clément-Cas anisotrope*) Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, une famille de triangulations anisotropes sur $\bar{\Omega}$, satisfaisant les Hypothèses 2.21 à 2.24. Alors les estimations suivantes tiennent pour tout $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N$ et pour tout $\psi \in [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^l} h_{min,T}^{-2} \|\mathbf{v} - I_{Cl}^0 \mathbf{v}\|_T^2 \lesssim m_1^2(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h^l) \|\nabla \mathbf{v}\|_{\Omega_l}^2, \quad l = s \text{ ou } d \quad (4.109)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{\Omega}_l)} \frac{h_E}{h_{min,E}^2} \|\mathbf{v} - I_{Cl}^0 \mathbf{v}\|_E^2 \lesssim m_1^2(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h^l) \|\nabla \mathbf{v}\|_{\Omega_l}^2, \quad l = s \text{ ou } d \quad (4.110)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} h_{min,T}^{-2} \|\psi - \mathcal{P}_{Cl} \psi\|_T^2 \lesssim m_2^2(\psi, \mathcal{T}_h^d) \|\nabla \psi\|_{\Omega_d}^2, \quad (4.111)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{\Omega}_d)} \frac{h_E}{h_{min,E}^2} \|\psi - \mathcal{P}_{Cl} \psi\|_E^2 \lesssim m_2^2(\psi, \mathcal{T}_h^d) \|\nabla \psi\|_{\Omega_d}^2. \quad (4.112)$$

Preuve. Toutes ces estimations sont démontrées dans [52, 90]. On pourra aussi se référer à [84] pour les estimés (4.109) à (4.110). ■

Remarque 4.23. Notons que les estimations (4.110) et (4.112) sont seulement valables pour les fonctions vectorielles en dimension $N = 3$.

4.4 Analyse d'erreur a-posteriori

Rappelons les résidus approchés définis en (5.13).

$$\mathbf{r}_{s,T} := \mathbf{f}_T + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h \text{ dans } T \in \mathcal{T}_h^s, \quad (4.113)$$

$$\mathbf{r}_{d,T} := \mathbf{f}_T - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h \text{ dans } T \in \mathcal{T}_h^d. \quad (4.114)$$

Rappelons aussi le saut du gradient dans la direction normale que nous avons défini en (5.15) :

$$\mathbf{J}_{E, \mathbf{n}_E} := \begin{cases} [(2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - p_h \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n}_E]_E & \text{pour tout } E \in \mathcal{E}_h(\Omega), \\ \mathbf{0} & \text{pour tout } E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega). \end{cases} \quad (4.115)$$

4.4.1 Indicateurs d'erreur a-posteriori

Définition 4.24. (*Indicateurs d'erreur résiduel-Cas anisotrope [5]*) Soit \mathcal{T}_h une triangulation anisotrope sur $\bar{\Omega}$. L'estimateur d'erreur a-posteriori résiduel est localement défini par,

$$\Theta_T := \left(\sum_{i=1}^9 \Theta_{i,T}^2 \right)^{1/2} \quad \text{pour chaque } T \in \mathcal{T}_h, \quad (4.116)$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_{1,T}^2 &:= h_{min,T}^2 \| \mathbf{r}_{l,T} \|_T^2, \quad \text{si } T \in \mathcal{T}_h^l, l = s \text{ ou } d, \\ \Theta_{2,T}^2 &:= \begin{cases} h_{min,T}^2 \| \mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \|_T^2, & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d, \\ 0 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \end{cases} \\ \Theta_{3,T}^2 &:= \| g - \text{div } \mathbf{u}_h \|_T^2, \\ \Theta_{4,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \bar{\Gamma}_I)} \left(\frac{h_{min,T}^2}{h_E} \right) \times \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \mathbf{u}_{s,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + \frac{\sqrt{\kappa_j}}{\alpha_1} 2 \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j \right\|_E^2 \right\}, \\ \Theta_{5,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \bar{\Gamma}_I)} \left(\frac{h_{min,T}^2}{h_E} \right) \times \| p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s \|_E^2, \\ \Theta_{6,T}^2 &:= \begin{cases} \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \bar{\Omega}_s)} \left(\frac{h_{min,T}^2}{h_E} \right) \times \| \mathbf{J}_{E, \mathbf{n}_E} \|_E^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \Omega_d)} \left(\frac{h_{min,T}^2}{h_E} \right) \times \| [p_h]_E \|_E^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d, \end{cases} \\ \Theta_{7,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \Omega_d)} \left(\frac{h_E}{h_{min,T}^2} \right) \times \| [\mathbf{u}_h]_E \|_E^2, \\ \Theta_{8,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \partial \Omega_d)} \left(\frac{h_E}{h_{min,T}^2} \right) \times \| [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_E]_E \|_E^2, \\ \Theta_{9,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \Omega_s^+)} \left(\frac{h_E}{h_{min,T}^2} \right) \times (1 + 2\mu) \| [\mathbf{u}_h]_E \|_E^2, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{u}_{l,h} := \mathbf{u}_h|_{\Omega_l}, \quad (4.117)$$

$$p_{l,h} := p_h|_{\Omega_l}, l = s, d. \quad (4.118)$$

- L'estimateur d'erreur global anisotrope est maintenant défini par,

$$\Theta := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Theta_T^2 \right)^{1/2}. \quad (4.119)$$

- Pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$, on définit ici le terme d'approximation local par,

$$\zeta_T := \begin{cases} h_{min,T} \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \\ h_{min,T} (\| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T + \| \mathbf{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \|_T) & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d. \end{cases}$$

Ainsi, on définit le terme d'approximation global par,

$$\zeta := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \zeta_T^2 \right)^{1/2}.$$

Remarque 4.25. Remarquons que, si $h_{min,T} \sim h_T \sim h_E \sim \text{diam}(E)$ pour $E \in \mathcal{E}(T)$, on retrouve les indicateurs d'erreur a-posteriori définis dans la section 3.5.1 sur les maillages isotropes.

4.4.2 Majoration d'erreur sur la pression

Rappelons le résultat de décomposition de Helmholtz que nous avons établi dans la sous-section 3.4.1 : chaque fonction $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ admet la décomposition,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad (4.120)$$

où $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{H}$ mais satisfaisant $\mathbf{v}_0 \in [H^1(\Omega)]^N$,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s, \\ \mathbf{rot} \psi & \text{dans } \Omega_d, \end{cases} \quad (4.121)$$

où $\psi \in H_0^1(\Omega_d)$ si $N = 2$ et $\psi \in [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ si $N = 3$, avec l'estimé :

$$\| \mathbf{v}_0 \|_{1,\Omega} + \| \psi \|_{1,\Omega_d} \lesssim \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{H}}. \quad (4.122)$$

Nous énonçons le résultat suivant [5] :

Théorème 4.26. ([5]) On suppose que la triangulation \mathcal{T}_h sur $\overline{\Omega}$ est anisotrope et satisfait les Hypothèses 2.21 à 2.24. On suppose de plus que, les hypothèses du Théorème

3.26 sont satisfaites. Alors il existe une fonction vectorielle $\mathbf{v}_{0,\varepsilon} \in [H^1(\Omega)]^N$ et une fonction ψ_ε , avec,

$$\begin{cases} \psi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_d) & \text{si } N = 2, \\ \psi_\varepsilon \in [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d) & \text{si } N = 3, \end{cases}$$

dépendant de l'erreur ε , telles qu'on ait l'estimation :

$$\|\varepsilon\| \lesssim m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_\varepsilon, \mathcal{T}_h)(\Theta + \zeta) + \|\mathbf{e}\|_h, \quad (4.123)$$

où $m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_\varepsilon, \mathcal{T}_h)$, est la mesure d'alignement définie par (4.87).

Preuve. $\varepsilon = p - p_h \in L_0^2(\Omega)$, alors il existe [67, Corollaire 2.4, Page 24] une fonction vectorielle $\mathbf{v}_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega)]^N$ dépendant de l'erreur $\varepsilon = p - p_h$ telle que,

$$\|\varepsilon\| \lesssim \frac{\int_\Omega \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon}{\|\nabla \varepsilon\|}. \quad (4.124)$$

$\mathbf{v}_\varepsilon \in \mathbf{H}$, donc \mathbf{v}_ε admet la décomposition de Helmholtz :

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{v}_{0,\varepsilon} + \mathbf{v}_{1,\varepsilon}, \quad (4.125)$$

où $\mathbf{v}_{0,\varepsilon} \in [H^1(\Omega)]^N$ et $\mathbf{v}_{1,\varepsilon} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s \\ \mathbf{rot} \psi_\varepsilon & \text{dans } \Omega_d \end{cases}$, avec $\psi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_d)$, si $N = 2$ tandis que $\psi_\varepsilon \in [H^1(\Omega_d)]^N \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$, si $N = 3$ et satisfaisant l'estimation (3.161). Pour $U = (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_h \cup \mathbf{H} \times Q$ et $W = (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}_h \cup \mathbf{H} \times Q$, on définit la forme bilinéaire,

$$\mathbf{L}_h(U, W) := C_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}_h(\mathbf{u}, q) + \mathbf{b}_h(\mathbf{v}, p). \quad (4.126)$$

Par définition,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_h(U, W) &= 2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} (\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}))_T + (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_d} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_I} \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\operatorname{div} \mathbf{u}, q)_T - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\operatorname{div} \mathbf{v}, p)_T + \mathbf{J}^{\text{aniso}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Avec $W = (\mathbf{v}_\varepsilon, 0) \in \mathbf{H} \times Q$ et sous les hypothèses de régularité du Théorème 3.26, on a pour $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_h(U - U_h, W) &= 2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} (\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{v}_\varepsilon))_T + (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{v}_\varepsilon)_{\Omega_d} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} \langle \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_I} \\ &\quad - (\operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon, \varepsilon)_\Omega. \end{aligned}$$

On tire,

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon, \varepsilon)_\Omega &= 2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} (\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{v}_\varepsilon))_T + (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{v}_\varepsilon)_{\Omega_d} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} \langle \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_I} \\ &\quad - \mathbf{L}_h(U - U_h, W) \end{aligned}$$

Par ailleurs, posons $\mathbf{v}_{\varepsilon,h} = \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h} + \mathbf{v}_{1,\varepsilon,h}$, avec $\mathbf{v}_{0,\varepsilon,h} = I_{Cl}^0(\mathbf{v}_{0,\varepsilon})$ et

$$\mathbf{v}_{1,\varepsilon,h} = \begin{cases} \mathbf{rot} \psi_{\varepsilon,h} & \text{dans } \Omega_d \\ 0 & \text{dans } \Omega_s \end{cases},$$

où

$$\psi_{\varepsilon,h} = \begin{cases} I_{Cl}^0 \psi_\varepsilon & \text{si } N = 2 \\ \mathcal{P}_{cl} \psi_\varepsilon & \text{si } N = 3 \end{cases}.$$

Pour $W = (\mathbf{v}_\varepsilon, 0)$ et $W_h = (\mathbf{v}_{\varepsilon,h}, 0)$, on a, en utilisant les formules d'intégration par parties, l'équation du résidu :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_h(U - U_h, W) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left\{ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T + (\mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T \right\} \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left\{ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T + (\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T \right\} \\ &\quad + (\mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h), \psi - \psi_{\varepsilon,h})_T + (\mathbf{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h), \psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,h})_T \Big\} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([p_h]_E, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_T \\ &\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([\mu \gamma_\tau (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h)]_E, \psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,h})_E - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s)} (\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_E \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{\Gamma}_I)} \left\{ (p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{u}_{s,h} \cdot \mathbf{n}_s, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_E \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j)_E \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)_\Omega &= 2\mu \left(\mathbb{D}_{\mathcal{T}_h^s}(\mathbf{e}), \mathbb{D}_{\mathcal{T}_h^s}(\mathbf{v}_\varepsilon) \right)_{\Omega_s} + \mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{v}_\varepsilon)_{\Omega_d} \\
&+ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\tau}_j)_{\Gamma_I} \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left\{ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T + (\mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T \right\} \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left\{ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T + (\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T \right\} \\
&+ \left(\operatorname{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h), \psi - \psi_{\varepsilon,h} \right)_T + \left(\operatorname{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h), \psi - \psi_{\varepsilon,h} \right)_T \Big\} \\
&+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([p_h]_E, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_T \\
&- \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([\mu \gamma_\tau (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h)]_E, \psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,h})_E - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s)} (\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_E \\
&+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{\Gamma}_I)} \left\{ (p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{u}_{s,h} \cdot \mathbf{n}_s, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_E \right. \\
&\left. - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j)_E \right\}.
\end{aligned}$$

Inégalités triangulaire et de Cauchy-Schwarz, la continuité de l'opérateur trace γ_0 , l'inégalité de Poincaré-Friedrich et les estimations d'interpolation de Clément pour la cas anisotrope conduisent à :

$$\begin{aligned}
(\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)_\Omega &\lesssim 2\mu \left\| \mathbb{D}_{\mathcal{T}_h^s}(\mathbf{e}) \right\|_{\Omega_s} \times \left\| \mathbb{D}(\mathbf{v}_\varepsilon) \right\|_{\Omega_s} + \mu \left\| \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \right\|_{\Omega_d} \times \left\| \mathbf{v}_\varepsilon \right\|_{\Omega_d} \\
&+ \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} \left\| \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \right\|_{\Gamma_I} \right\} \times \left\| \nabla \mathbf{v}_\varepsilon \right\|_{\Omega_s} \\
&+ \left\{ m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_\varepsilon, \mathcal{T}_h) \right\} \times (\Theta + \zeta) (\left\| \nabla \mathbf{v}_{0,\varepsilon} \right\|_\Omega + \left\| \nabla \psi_\varepsilon \right\|_\Omega).
\end{aligned}$$

On utilise maintenant la propriété (3.161) et la condition (1.4) sur le tenseur de perméabilité \mathbb{K} pour avoir,

$$(\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)_\Omega \lesssim (\Theta + \zeta) \left\{ m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_\varepsilon, \mathcal{T}_h) \right\} \times \left\| \mathbf{v}_\varepsilon \right\|_{\mathbf{H}} + \left\| \mathbf{e} \right\|_h \times \left\| \mathbf{v}_\varepsilon \right\|_{\mathbf{H}}. \quad (4.127)$$

On déduit alors, en tenant compte du fait que $\left\| \mathbf{v}_\varepsilon \right\|_{\mathbf{H}} \leq \left\| \mathbf{v}_\varepsilon \right\|_{1,\Omega}$, l'estimation :

$$\frac{(\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)_\Omega}{\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega}} \lesssim \{m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_\varepsilon, \mathcal{T}_h)\} \times (\Theta + \zeta) + \|\mathbf{e}\|_h. \quad (4.128)$$

Les estimés (4.124) et (4.128) concluent le théorème. ■

4.4.3 Minoration d'erreur a-posteriori

Rappelons le résultat de régularité que nous avons établi dans la section 3.4.2 :

Théorème 4.27. ([7]) Soit $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H} \times Q$, l'unique solution du problème variationnel (2.146). Si $\mathbf{f} \in H(\operatorname{rot}, \Omega_d)$ et $\mathbb{K} \in [C^{0,1}(\bar{\Omega}_d)]^{N \times N}$, alors il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que :

$$\mathbf{u}|_{\Omega_d} \in [H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega_d)]^N.$$

Pour prouver l'efficacité de nos indicateurs d'erreur locaux, nous introduisons pour $\omega \subset \Omega$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{h,\omega}^2 &= \sum_{T \subset \bar{\omega} \cap \bar{\Omega}_s} |\mathbf{v}|_{1,T}^2 \\ &+ \sum_{T \subset \bar{\omega} \cap \bar{\Omega}_d} (\|\mathbf{v}\|_T^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_T^2) \\ &+ \|\mathbf{v}_s \times \mathbf{n}\|_{\Gamma_T \cap \bar{\omega}}^2 + \sum_{T \subset \bar{\omega}} \mathbf{J}_T^{\text{aniso}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_T^{\text{aniso}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= (1 + 2\mu) \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s^+) \cap \mathcal{E}(T)} \left(\frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \right) \times \|[\mathbf{v}]_E\|_E^2 \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d) \cap \mathcal{E}(T)} \left(\frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \right) \times \|[\mathbf{v}]_E\|_E^2 \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega_d) \cap \mathcal{E}(T)} \left(\frac{h_E}{h_{\min,E}^2} \right) \times \|[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_E]_E\|_E^2. \end{aligned}$$

Le résultat principal de cette sous-section s'énonce comme suit :

Théorème 4.28. (Efficacité [5]) On suppose que la triangulation \mathcal{T}_h sur $\bar{\Omega}$ est anisotrope et satisfait les Hypothèses 2.21 à 2.24. On suppose de plus que, les hypothèses du Théorème 3.26 sont satisfaites. Alors, une minoration locale de l'erreur

est donnée par :

$$\Theta_T \lesssim \| \mathbf{e} \|_{h, \tilde{\omega}_T} + \| \varepsilon \|_{\tilde{\omega}_T} + \sum_{T' \subset \tilde{\omega}_T} \zeta_{T'}, \quad (4.129)$$

où $\tilde{\omega}_T$ est l'union finie des éléments voisins de T .

Preuve. Nous commençons par borner chaque terme du résidu séparément. Puisque, par le Théorème 4.27, le saut de \mathbf{u} à travers toutes les arêtes/faces de Ω_d est nul, alors, pour tout $i = 7, 8$ ou 9 , nous avons clairement l'estimation :

$$\Theta_{i,T}^2 \lesssim \mathbf{J}_T^{\text{aniso}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = \mathbf{J}_T^{\text{aniso}}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \lesssim \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{h,T}. \quad (4.130)$$

Ainsi, il reste à estimer les indicateurs locaux pour $i \leq 6$.

1. **Terme résiduel dans Ω_s .** On majore l'indicateur $\Theta_{1,T}$ pour $T \in \mathcal{T}_h^s$. Pour cela, on pose :

$$\mathbf{w}_T := \mathbf{r}_{s,T} b_T \in [H_0^1(T)]^N, \quad (4.131)$$

puis considérons,

$$\int_T \mathbf{r}_{s,T} \cdot \mathbf{w}_T = \int_T (\mathbf{f}_h + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_T. \quad (4.132)$$

Nous introduisons \mathbf{f} et nous utilisons la formulation faible (2.146) pour obtenir,

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{r}_{s,T} \cdot \mathbf{w}_T &= \int_T (\mathbf{f}_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T \\ &+ \int_T (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{w}_T - p \operatorname{div} \mathbf{w}_T) \\ &+ \int_T (2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_T. \end{aligned}$$

En intégrant par partie le dernier terme, on obtient,

$$\int_T \mathbf{r}_{s,T} \cdot \mathbf{w}_T = \int_T (\mathbf{f}_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T + 2\mu \int_T \mathbb{D}(\mathbf{e}) : \nabla(\mathbf{w}_T) - \int_T \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_T.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour avoir,

$$\int_T \mathbf{r}_{s,T} \cdot \mathbf{w}_T \lesssim \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T \| \mathbf{w}_T \|_T + (2\mu | \mathbf{e} |_{1,T} + \| \varepsilon \|_T) | \mathbf{w}_T |_{1,T}.$$

Les inégalités inverses (2.88), (2.97) et la relation triviale $\| \mathbf{w}_T \|_T \leq \| \mathbf{r}_{s,T} \|_T$ impliquent :

$$\| \mathbf{r}_{s,T} \|_T^2 \lesssim (\| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T + h_{min,T}^{-1} |\mathbf{e}|_{1,T} + h_{min,T}^{-1} \| \varepsilon \|_T) \| \mathbf{r}_{s,T} \|_T,$$

ou de façon équivalente,

$$\Theta_{1,T} \lesssim h_{min,T} \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T + |\mathbf{e}|_{1,T} + \| \varepsilon \|_T. \quad (4.133)$$

2. Terme résiduel dans Ω_d . On majore ensuite l'indicateur $\Theta_{1,T}$ pour $T \in \mathcal{T}_h^d$. Posons :

$$\mathbf{w}_T := \mathbf{r}_{d,T} b_T \in [H_0^1(T)]^N. \quad (4.134)$$

En utilisant la formulation faible (2.146) et en intégrant par partie sur T , on obtient

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{r}_{d,T} \cdot \mathbf{w}_T &= \int_T (\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_T \\ &= \int_T (\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_T \\ &\quad + \int_T (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T - p \operatorname{div} \mathbf{w}_T \\ &= \int_T (\mathbf{f}_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T + \int_T (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \cdot \mathbf{w}_T - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_T). \end{aligned}$$

Comme précédemment, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités inverses (2.88)-(2.97) conduisent à :

$$\Theta_{1,T} \lesssim h_{min,T} \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T + \| \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \|_T + \| \varepsilon \|_T. \quad (4.135)$$

3. Terme résiduel (rotationnel) dans Ω_d . Pour $T \in \mathcal{T}_h^d$, nous posons

$$K_T = \operatorname{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \text{ et } \mathbf{w}_T = K_T b_T. \quad (4.136)$$

Nous notons que $\operatorname{rot} \mathbf{w}_T$ appartient à l'espace \mathbf{H} et est à divergence nulle, donc par (2.146), nous avons $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{w}_T) = (\mathbf{f}, \operatorname{rot} \mathbf{w}_T)_T$,

ou de façon équivalente :

$$\int_T (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_T = 0. \quad (4.137)$$

Mais en utilisant la formule de Green (2.96), nous pouvons écrire,

$$\int_T K_T \cdot \mathbf{w}_T = \int_T \mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T + \int_T (\mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_T,$$

et en utilisant (4.137) nous déduisons que,

$$\int_T K_T \cdot \mathbf{w}_T = \int_T \mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{w}_T + \int_T \mu \mathbb{K}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_T.$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons,

$$\int_T K_T \cdot \mathbf{w}_T \leq \|\mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mathbf{f})\|_T \|\mathbf{w}_T\|_T + \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}\|_T \|\mathbf{rot} \mathbf{w}_T\|_T.$$

Encore les inégalités inverses (2.88)-(2.97) conduisent à :

$$\Theta_{2,T} \lesssim \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}\|_T + h_{min,T} \|\mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mathbf{f})\|_T. \quad (4.138)$$

4. Terme résiduel (divergence) dans Ω . Nous voyons directement que,

$$g - \operatorname{div} \mathbf{u}_h = \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{u}_h = \operatorname{div} \mathbf{e}.$$

Donc par inégalité de Cauchy-Schwarz, on conclut que

$$\Theta_{3,T} = \|g - \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_T \leq \|\operatorname{div} \mathbf{e}\|_T \leq |\mathbf{e}|_{1,T}. \quad (4.139)$$

5. Les termes d'interface liés au couplage. Pour estimer $\Theta_{4,T}$ et $\Theta_{5,T}$, nous fixons une arête/face E incluse dans Γ_I et pour une constante r_E fixé et un vecteur unitaire \mathbf{N} , nous considérons,

$$\mathbf{w}_E = r_E b_E \mathbf{N}.$$

\mathbf{w}_E appartient clairement à \mathbf{H} . Donc la formulation faible (2.146) conduit à

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_E) + \mathbf{b}(\mathbf{w}_E, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_E)_{\omega_E},$$

qui est équivalente à,

$$\begin{aligned} & \int_{T_s} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) - p \nabla \cdot \mathbf{w}_E) + \int_{T_d} (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_E - p \operatorname{div} \mathbf{w}_E) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_s \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_E)_{\omega_E}, \end{aligned}$$

où T_s (resp. T_d) est l'unique triangle/tétraèdre inclu dans $\bar{\Omega}_s$ (resp. $\bar{\Omega}_d$) ayant E comme arête/face. En d'autre terme, les intégrations par partie dans T_s et dans T_d conduisent à,

$$\begin{aligned} & \int_{T_s} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) - p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_E) + \int_{T_d} (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{w}_E - p_h \operatorname{div} \mathbf{w}_E) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\ & = - \int_{T_s} (2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_E + \int_{T_d} (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{w}_E + \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_E \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\ & - \int_E ([p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E - 2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \mathbf{n}_E \cdot \mathbf{w}_E)). \end{aligned} \tag{4.140}$$

En soustrayant cette identité de (4.140), nous trouvons,

$$\begin{aligned} & \int_E ([p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E - 2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \mathbf{n}_E \cdot \mathbf{w}_E) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\ & = \int_{T_s} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{e}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) + \int_{T_d} (\mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \cdot \mathbf{w}_E - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{e}_s \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\ & - \int_{T_s} (\mathbf{f} + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_E - \int_{T_d} (\mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{w}_E - \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_E. \end{aligned}$$

Dans le dernier terme, nous introduisons les éléments résiduels $\mathbf{r}_{l,T}$, pour arriver à :

$$\begin{aligned}
& \int_E ([p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E - 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \mathbf{n}_E \cdot \mathbf{w}_E) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\
&= \int_{T_s} (2\mu\mathbb{D}(\mathbf{e}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) + \int_{T_d} (\mu\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \cdot \mathbf{w}_E - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) \\
&+ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{e}_s \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\
&- \int_{T_s} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h + \mathbf{r}_{s,T}) \cdot \mathbf{w}_E - \int_{T_d} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h + \mathbf{r}_{d,T}) \cdot \mathbf{w}_E.
\end{aligned} \tag{4.141}$$

• Estimation du terme $\Theta_{4,T}$: Pour chaque $j = 1, \dots, N-1$, nous prenons $r_E = \mathbf{u}_h \cdot \tau_j + \frac{\sqrt{\kappa_j}}{\alpha_1} 2\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) \cdot \tau_j$ et $\mathbf{N} = \tau_j$. Avec ce choix, l'identité (4.141) et l'inégalité inverse (2.90) donnent :

$$\begin{aligned}
\|r_E\|_E^2 &\lesssim \int_{T_s} (2\mu\mathbb{D}(\mathbf{e}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) + \int_{T_d} (\mu\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \cdot \mathbf{w}_E - \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}_E) \\
&+ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} (\mathbf{e}_s \cdot \tau_j, \mathbf{w}_{E,s} \cdot \tau_j)_E \\
&- \int_{T_s} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h + \mathbf{r}_{s,T}) \cdot \mathbf{w}_E - \int_{T_d} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h + \mathbf{r}_{d,T}) \cdot \mathbf{w}_E.
\end{aligned}$$

Maintenant, on fixe $T = T_s$ et on applique successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les inégalités inverses (2.97), (2.98) et les estimations (4.133) et (4.135) pour avoir,

$$\frac{h_{min,T}}{h_{E,T}^{1/2}} \left\| \mathbf{u}_h \cdot \tau_j + \frac{\sqrt{\kappa_j}}{\alpha_1} 2\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) \cdot \tau_j \right\|_E \lesssim |\mathbf{e}|_{h,\omega_E} + \|\varepsilon\|_{\omega_E} + \sum_{T' \subset \omega_E} \zeta_{T'} \tag{4.142}$$

avec $\omega_E = T_s \cup T_d$.

• Estimons le terme $\Theta_{5,T}$: Nous prenons ici $r_E = p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s$ et $\mathbf{N} = \mathbf{n}_s$. Comme précédemment, l'identité (4.141), les inégalités inverses (2.97), (2.98) et les estimations (4.133) et (4.135) conduisent à :

$$\frac{h_{min,T}}{h_{E,T}^{1/2}} \|p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s\|_E \lesssim |\mathbf{e}|_{h,\omega_E} + \|\varepsilon\|_{h,\omega_E} + \sum_{T' \subset \omega_E} \zeta_{T'} \tag{4.143}$$

6. Le saut normal dans Ω_s . Pour chaque arête/face $E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s)$, nous consid-

érons $\omega_E = T_1 \cup T_2$, avec $\partial T_1 \cap \partial T_2 = E$. Comme $\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} \in [\mathbb{P}^0(E)]^N$ nous posons

$$\mathbf{w}_E := F_{ext}(-\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}) b_E \in [H_0^1(\omega_E)]^N, \quad (4.144)$$

Premièrement la formulation faible (2.146) conduit à :

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_E) + \mathbf{b}(\mathbf{w}_E, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_E)_{\omega_E},$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_E} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_E &= \int_{\omega_E} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}) - p \mathbb{I}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) \\ &+ \int_{\partial \omega_E} (p \mathbb{I} - 2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u})) \mathbf{n}_E \cdot \mathbf{w}_E. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Par intégration par partie élément par élément, nous avons donc l'égalité

$$\begin{aligned} - \int_E \mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} \cdot \mathbf{w}_E &= \int_{\omega_E} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - p_h \mathbb{I}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) \\ &- \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (-2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) + \nabla p_h) \cdot \mathbf{w}_E. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Par l'identité précédente (4.145), nous obtenons :

$$\begin{aligned} - \int_E \mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} \cdot \mathbf{w}_E &= \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\mathbf{f} - (-2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) + \nabla p_h)) \cdot \mathbf{w}_E \\ &- \int_{\omega_E} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{e}) - \varepsilon \mathbb{I}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}_E) \end{aligned}$$

On fixe maintenant $T = T_1$ et nous introduisons l'approximation \mathbf{f}_h de \mathbf{f} . Alors via l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités inverses (2.90), (2.98) et (2.99), on obtient l'estimation :

$$\|\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}\|_E \lesssim h_{E,T}^{1/2} \left(\sum_{i=1}^2 (\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{T_i} + \|\mathbf{r}_{s,T_i}\|_{T_i}) \right) + \frac{h_{E,T}^{1/2}}{h_{min,T}} (|\mathbf{e}|_{1,\omega_E} + \|\varepsilon\|_{\omega_E})$$

En utilisant l'estimé (4.133) de $\Theta_{1,T}$, on aboutit à l'estimation,

$$\frac{h_{min,E}^{1/2}}{h_E^{1/2}} \|\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}\|_E \lesssim |\mathbf{e}|_{1,\omega_E} + \|\varepsilon\|_{\omega_E} + \sum_{T' \subset \omega_E} h_{min,T'} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{T'} \quad (4.147)$$

7. **Le saut de la pression dans Ω_d .** Pour chaque arête/face $E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)$, nous considérons $\omega_E = T_1 \cup T_2$. Comme $[p_h]_E \in \mathbb{P}^0(E)$, nous posons,

$$\mathbf{w}_E := F_{ext}([p_h]_E)b_E \mathbf{n}_E \in [H_0^1(\omega_E)]^N.$$

Premièrement nous notons que $p \in H^1(\omega_E)$. Nous avons par formule de Green,

$$\int_{\omega_E} (\nabla p \cdot \mathbf{w}_E + p \operatorname{div} \mathbf{w}_E) = 0.$$

Encore par intégration par partie élément par élément, on a donc :

$$\int_E [p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E = \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\nabla p_h \cdot \mathbf{w}_E + p_h \nabla \cdot \mathbf{w}_E).$$

En prenant la différence de ces deux identités, nous obtenons :

$$\int_E [p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E = \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\nabla(p_h - p) \cdot \mathbf{w}_E + (p_h - p) \operatorname{div} \mathbf{w}_E).$$

En rappelant que $\nabla p = \mathbf{f} - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}$ et en introduisant le terme $\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int_E [p_h]_E \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E &= \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\nabla p_h - \mathbf{f} + \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}_E + (p_h - p) \operatorname{div} \mathbf{w}_E \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\nabla p_h - \mathbf{f}_h + \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{w}_E + (p_h - p) \operatorname{div} \mathbf{w}_E \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} (\mathbf{f}_h - \mathbf{f} + \mu \mathbb{K}^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)) \cdot \mathbf{w}_E. \end{aligned}$$

On fixe maintenant $T = T_1$, puis on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi les inégalités inverses (2.90), (2.98), (2.99) conduisent à,

$$\begin{aligned} \|[p_h]_E\|_E &\lesssim \sum_{i=1}^2 \left(h_{E,T}^{1/2} \|\mathbf{r}_{d,T_i}\|_{T_i} + \frac{h_{E,T}^{1/2}}{h_{min,T}} \|p_h - p\|_{T_i} \right) \\ &\quad + h_{E,T}^{1/2} \sum_{i=1}^2 (\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{T_i} + \|\mathbb{K}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{T_i}). \end{aligned}$$

Par (4.135) et (4.138) , nous déduisons que,

$$\frac{h_{min,E}}{h_E^{1/2}} \|[p_h]_E\|_E \lesssim \sum_{T' \subset \omega_E} h_{min,T'} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{T'} + \|\varepsilon\|_{\omega_E} + \|\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}\|_{\omega_E}. \quad (4.148)$$

Les estimations (4.130), (4.133), (4.135), (4.138), (4.139), (4.142), (4.143), (4.147), (4.148) et la condition (1.4) prouvent la minoration de l'erreur locale désirée.

■

4.5 Conclusion

Nous avons fait dans ce chapitre, une extension des résultats d'analyse d'erreur a-posteriori de type résiduel obtenus dans le chapitre 3 à une discrétisation anisotrope. Nous nous sommes intéressés à une discrétisation via des éléments finis non-conformes de type Crouzeix-Raviart. Nous avons utilisé une généralisation de l'inégalité de Korn discrète pour démontrer la stabilité du problème discret associé. Nous avons ensuite proposé une famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori, avec lesquels nous avons fait une analyse d'erreur a-posteriori. En outre, nous avons établi une minoration locale de la semi-norme de l'erreur, laquelle ne dépend pas du caractère anisotrope du maillage.

Analyse d'erreur a-posteriori d'une méthode d'éléments finis mixtes conforme sur une discrétisation anisotrope

Sommaire

5.1	Introduction	161
5.2	Approximation par éléments finis conformes	162
5.3	Analyse d'erreur a-posteriori	164
5.4	Conclusion	185

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse d'erreur a-posteriori de type résiduel. Nous considérons une discrétisation anisotrope. La méthode d'éléments finis mixtes est conforme pour les deux inconnues. L'objectif est de généraliser les estimateurs d'erreur a-posteriori de type résiduel obtenus dans les papiers [15, 46, 54, 65] pour les approximations conformes en admettant des maillages anisotropes. Sous certaines hypothèses théoriques faites sur les mailles et sur les espaces d'approximations, nous développons une analyse d'erreur a-posteriori résiduel pour le problème couplé Stokes-Darcy. Les indicateurs d'erreur a-posteriori sont résiduels et ils sont définis dans la sous-section 5.3.1. Nous démontrons que la famille constituée de ces indicateurs d'erreur a-posteriori est optimale. En outre, nous démontrons que cette famille est fiable dans la sous-section 5.3.2. La propriété d'efficacité est démontrée dans la sous-section 5.3.3.

Enfin, dans la sous-section 5.3.4, nous faisons une application des résultats obtenus à une discrétisation isotrope.

5.2 Approximation par éléments finis conformes

Nous rappelons la formulation faible (2.146) de la section 2.7 : trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H} \times Q$ tels que,

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, p) &= L(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H} , \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, q) &= G(q) & \forall q \in Q , \end{cases} \quad (5.1)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &:= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) : \mathbf{v}_s \in [H^1(\Omega_s)]^N, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_d = 0 \text{ sur } \Gamma_d \} , \\ Q &:= L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \right\} . \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}))_{\Omega_s} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{\kappa_j}} \langle \mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_I} + \mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_d}, \\ \mathbf{b}(\mathbf{v}, q) &:= - \int_{\Omega} q \text{ div } \mathbf{v}. \end{aligned}$$

5.2.1 Problème discret

Nous discrétisons dans cette sous-section le problème (5.1). La méthode d'éléments finis est conforme pour les deux inconnues.

On suppose que \mathcal{T}_h est une triangulation anisotrope sur $\bar{\Omega}$ et on considère deux espaces vectoriels de dimension finie \mathbf{H}_h et Q_h constitués des polynômes sur chaque élément T de la triangulation tels que $\mathbf{H}_h \subset \mathbf{H}$ et $Q_h \subset Q$.

Comme $\mathbf{H}_h \subset \mathbf{H}$ et $Q_h \subset Q$, alors le problème discret associé au problème faible (5.1) est donné par le schéma de Galerkin standard : trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{H}_h \times Q_h$ tels que,

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{v}_h, p_h) &= L(\mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}_h, q_h) &= G(q_h), \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (5.2)$$

L'erreur est définie par :

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \text{ et } \varepsilon = p - p_h. \quad (5.3)$$

En soustrayant (5.2) de (2.146), on obtient la relation d'orthogonalité de Galerkin :

$$\mathbf{a}(\mathbf{e}, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{v}_h, \varepsilon) + \mathbf{b}(\mathbf{e}, q_h) = 0, \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{H}_h \times Q_h \quad (5.4)$$

5.2.2 Existence et l'unicité d'une solution du problème discret

On introduit les espaces,

$$\mathbf{N}_h := \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h : \mathbf{b}(\mathbf{v}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h \}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{H}_{h,d} := \{ \mathbf{v}_h|_{\Omega_d} : \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h \}. \quad (5.6)$$

Nous admettons les hypothèses suivantes sur les espaces d'approximations :

Hypothèse 5.1. *Pour la majoration d'erreur a-posteriori, on suppose que l'espace d'interpolation de Clément V_{cl}^0 soit contenu dans l'espace des vitesses \mathbf{H}_h . On suppose de plus que,*

$$\text{rot } \mathbf{H}_{h,1} \subset \mathbf{H}_{h,d}, \text{ si } N = 3. \quad (5.7)$$

$$\text{rot } V_{cl}^0 \subset \mathbf{H}_{h,d}, \text{ si } N = 2. \quad (5.8)$$

Hypothèse 5.2. *Enfin, pour obtenir une solution discrète, on suppose que les paires d'espaces éléments finis $\{\mathbf{H}_h, Q_h\}_{h>0}$ vérifient les conditions de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi, c'est-à-dire,*

1. Coercivité de \mathbf{a} sur $\mathbf{N}_h \times \mathbf{N}_h$: $\exists \alpha > 0$ (peut dépendre de h) tel que,

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}}^2, \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{N}_h. \quad (5.9)$$

2. Condition inf-sup de \mathbf{b} sur $\mathbf{H}_h \times Q_h$: $\exists \beta > 0$ (peut dépendre de h) tel que,

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}}} \geq \beta \|q_h\|, \forall q_h \in Q_h. \quad (5.10)$$

Théorème 5.3. *Sous l'Hypothèse 5.2, le problème discret (5.2) admet une solution et*

une seule dans $\mathbf{H}_h \times Q_h$.

5.3 Analyse d'erreur a-posteriori

5.3.1 Indicateurs d'erreur a-posteriori

Equation des résidus

Pour $U = (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H} \times Q$ et $W = (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H} \times Q$, on définit, la forme bilinéaire continue A par :

$$A(U, W) = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, p) + \mathbf{b}(\mathbf{u}, q) \quad (5.11)$$

On a successivement les égalités pour tout $W = (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H} \times Q$ et pour tout $W_h \in \mathbf{H}_h \times Q_h$:

$$\begin{aligned} A(U - U_h, W) &= A(U - U_h, W - W_h) \\ &= \{\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{u}, q - q_h) + \mathbf{b}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, p)\} \\ &\quad - \{\mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{u}_h, q - q_h) + \mathbf{b}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, p_h)\} \\ &= -\{\mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{u}_h, q - q_h) + \mathbf{b}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, p_h)\} \\ &\quad + (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_\Omega - (g, q - q_h)_\Omega \\ &= -2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}_h), \mathbb{D}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h))_{\Omega_s} + (p_h, \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h))_\Omega \\ &\quad + (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_\Omega - (g, q - q_h)_\Omega \\ &\quad - \mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_{\Omega_d} + (q - q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h)_\Omega \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \cdot \boldsymbol{\tau}_j)_{\Gamma_I} \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_\Omega - (g, q)_\Omega - 2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}_h), \mathbb{D}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h))_{\Omega_s} + (p_h, \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h))_\Omega \\ &\quad - \mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_{\Omega_d} + (q, \operatorname{div} \mathbf{u}_h)_\Omega \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \cdot \boldsymbol{\tau}_j)_{\Gamma_I} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(U - U_h, W) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left\{ (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T + (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - g, q)_T + 2\mu (\mathbb{D}(\mathbf{u}_h), \mathbb{D}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h))_T \right. \\
&\quad \left. + (p_h, \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h))_T \right\} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left\{ (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T + (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - g, q)_T \right. \\
&\quad \left. - \mu (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T + (p_h, \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h))_T \right\} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \cdot \boldsymbol{\tau}_j)_{\Gamma_I}.
\end{aligned}$$

On intègre par partie puis on introduit l'approximation \mathbf{f}_h de \mathbf{f} :

$$\begin{aligned}
A(U - U_h, W) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left\{ (\mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T + (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - g, q)_T + (\mathbf{R}_{s,T} - \mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T \right\} \\
&\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left\{ (\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T + (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - g, q)_T + (\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_T \right\} \\
&\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s)} (\mathbf{J}_{E, \mathbf{n}_E}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_E + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([p_h]_E, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}_E)_E \quad (5.12) \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)} \left\{ (p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}_s)_E \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} \mathbf{u}_{s,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \cdot \boldsymbol{\tau}_j \right)_E \right\}.
\end{aligned}$$

Définition des indicateurs d'erreur a-posteriori

Rappelons les résidus approchés définis en (5.13).

$$\mathbf{r}_{s,T} := \mathbf{f}_T + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h \text{ dans } T \in \mathcal{T}_h^s, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{r}_{d,T} := \mathbf{f}_T - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h \text{ dans } T \in \mathcal{T}_h^d. \quad (5.14)$$

Rappelons aussi le saut du gradient dans la direction normale que nous avons défini en (5.15) :

$$\mathbf{J}_{E, \mathbf{n}_E} := \begin{cases} [(2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - p_h \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n}_E]_E & \text{pour tout } E \in \mathcal{E}_h(\Omega), \\ \mathbf{0} & \text{pour tout } E \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega). \end{cases} \quad (5.15)$$

Définition 5.4. (*Indicateurs d'erreur a-posteriori-Cas anisotrope [5]*) Soit \mathcal{T}_h une triangulation anisotrope sur $\bar{\Omega}$. Pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$, on définit l'indicateur d'er-

reur local Θ_T par,

$$\Theta_T := \left\{ \sum_{i=1}^6 \Theta_{i,T}^2 \right\}^{1/2}, \quad (5.16)$$

avec,

$$\begin{aligned} \Theta_{1,T}^2 &:= \begin{cases} h_{min,T}^2 \| \mathbf{r}_{s,T} \|_T^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \\ h_{min,T}^2 \| \mathbf{r}_{d,T} \|_T^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d, \end{cases} \\ \Theta_{2,T}^2 &:= \begin{cases} h_{min,T}^2 \| \mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \|_T^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d, \\ 0 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \end{cases} \\ \Theta_{3,T}^2 &:= \| g - \text{div } \mathbf{u}_h \|_T^2, \\ \Theta_{4,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \bar{\Gamma}_I)} \left(\frac{h_{min,T}^2}{h_E} \right) \times \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j + \frac{\sqrt{k_j}}{\alpha_1} 2 \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \tau_j \right\|_E^2 \right\}, \\ \Theta_{5,T}^2 &:= \sum_{E \in \partial T \cap \bar{\Gamma}_I} \left(\frac{h_{min,T}^2}{h_E} \right) \times \| p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s \|_E^2, \\ \Theta_{6,T}^2 &:= \begin{cases} \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \bar{\Omega}_s)} \left(\frac{h_{min,T}^2}{h_E} \right) \times \| \mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} \|_E^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \Omega_d)} \left(\frac{h_{min,T}^2}{h_E} \right) \times \| [p_h]_E \|_E^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d. \end{cases} \end{aligned}$$

- L'estimateur d'erreur a-posteriori anisotrope est donc défini par :

$$\Theta := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Theta_T^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.17)$$

- Pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$, on définit le terme d'approximation local par :

$$\zeta_T := \begin{cases} h_{min,T} \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \\ h_{min,T} (\| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T + \| \mathbf{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \|_T) & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d. \end{cases} \quad (5.18)$$

Ainsi, on définit le terme d'approximation global par

$$\zeta := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \zeta_T^2 \right)^{1/2}. \quad (5.19)$$

5.3.2 Majoration d'erreur a-posteriori

Rappelons d'abord les mesures d'alignements définies dans la sous-section 4.3.1 :

$$m_1(v, \mathcal{T}_h^l) := \frac{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^l} h_{min,T}^{-2} \|\mathbb{C}_T^{Tr} \nabla v\|_T^2 \right)^{1/2}}{\|\nabla v\|_{\Omega_l}}, \quad (5.20)$$

$$m_2(\psi, \mathcal{T}_h^d) := \frac{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} h_{min,T}^{-4} \|\nabla(\mathbb{C}_T^{Tr} \psi) \mathbb{C}_T\|_T^2 \right)^{1/2}}{\|\nabla \psi\|_{\Omega_d}}, \quad (5.21)$$

et

$$m(\mathbf{v}, \psi, \mathcal{T}_h) := \begin{cases} m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h^s) + m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h^d) + m_1(\psi, \mathcal{T}_h^d) & \text{si } \psi \in H_0^1(\Omega_d), \\ m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h^s) + m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h^d) + m_2(\psi, \mathcal{T}_h^d) & \text{si } \psi \in \mathcal{H}. \end{cases} \quad (5.22)$$

Nous rappelons aussi le résultat de décomposition de Helmholtz de la sous-section 3.4.1 : chaque fonction $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ admet la décomposition,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad (5.23)$$

où $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{H}$ mais satisfaisant $\mathbf{v}_0 \in [H^1(\Omega)]^N$,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s, \\ \mathbf{rot} \psi & \text{dans } \Omega_d, \end{cases} \quad (5.24)$$

où $\psi \in H_0^1(\Omega_d)$ si $N = 2$ et $\psi \in [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ si $N = 3$, avec l'estimé :

$$\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega} + \|\psi\|_{1,\Omega_d} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}. \quad (5.25)$$

Maintenant, nous bornons d'abord l'erreur sur la pression.

Lemme 5.5. (Erreur sur la pression [5]) *On suppose que la triangulation \mathcal{T}_h sur $\overline{\Omega}$ est anisotrope et satisfait les Hypothèses 2.21 à 2.24. On suppose de plus que, les Hypothèses 5.1 et 5.2 sont satisfaites sur les espaces d'approximations. Alors, il existe une fonction $\mathbf{v}_{0,\varepsilon} \in [H^1(\Omega)]^N$ et une fonction ψ_ε , avec*

$$\begin{cases} \psi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_d) & \text{si } N = 2, \\ \psi_\varepsilon \in [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d) & \text{si } N = 3, \end{cases}$$

dépendant de l'erreur ε , telles qu'on ait l'estimation :

$$\|\varepsilon\| \lesssim \{m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_\varepsilon, \mathcal{T}_h)\} \times (\Theta + \zeta) + \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{H}}. \quad (5.26)$$

Preuve. Comme $\varepsilon \in L_0^2(\Omega)$, alors de [67, Corollaire 2.4, Page 24], il existe une fonction vectorielle $\mathbf{v}_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega)]^N \subset \mathbf{H}$ dépendant de l'erreur $\varepsilon = p - p_h$ telle que,

$$\|\varepsilon\| \lesssim \frac{(\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)_\Omega}{\|\nabla \mathbf{v}_\varepsilon\|}. \quad (5.27)$$

$\mathbf{v}_\varepsilon \in \mathbf{H}$, donc au vu du résultat de décomposition de Helmholtz, \mathbf{v}_ε admet la décomposition :

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{v}_{0,\varepsilon} + \mathbf{v}_{1,\varepsilon}, \quad (5.28)$$

où $\mathbf{v}_{0,\varepsilon} \in [H^1(\Omega)]^N$ et $\mathbf{v}_{1,\varepsilon} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s, \\ \mathbf{rot} \psi_\varepsilon & \text{dans } \Omega_d, \end{cases}$ avec $\psi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_d)$, si $N = 2$ et $\psi_\varepsilon \in [H^1(\Omega_d)]^N \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$, si $N = 3$ et satisfaisant l'estimation (5.25). Posons maintenant,

$$W = (\mathbf{v}_\varepsilon, 0) \in \mathbf{H} \times Q. \quad (5.29)$$

Alors

$$\begin{aligned} A(U - U_h, W) &= 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{v}_\varepsilon))_{\Omega_s} + \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{v}_\varepsilon)_{\Omega_d} \\ &\quad - (\varepsilon, \nabla \cdot \mathbf{v}_\varepsilon)_\Omega + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{e} \cdot \tau_j, \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \tau_j)_{\Gamma_I} \end{aligned}$$

Donc, on tire :

$$\begin{aligned} (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)_\Omega &= 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{v}_\varepsilon))_{\Omega_s} + \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{v}_\varepsilon)_{\Omega_d} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{e} \cdot \tau_j, \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \tau_j)_{\Gamma_I} - A(U - U_h, W). \end{aligned}$$

Au vu des Hypothèses 5.1 et 5.2, nous pouvons définir une fonction $\mathbf{v}_{\varepsilon,h}$ appartenant à l'espace discret \mathbf{H}_h par :

$$\mathbf{v}_{\varepsilon,h} = \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h} + \mathbf{v}_{1,\varepsilon,h}, \quad (5.30)$$

avec :

$$\mathbf{v}_{0,\varepsilon,h} = \mathbf{I}_{\text{cl}}(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}), \quad (5.31)$$

$$\mathbf{v}_{1,\varepsilon,h} = \begin{cases} \mathbf{rot} \psi_{\varepsilon,h} & \text{dans } \Omega_d, \\ \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s, \end{cases} \quad (5.32)$$

où

$$\psi_{\varepsilon,h} = \begin{cases} \mathbf{I}_{\text{cl}}^0 \psi_\varepsilon & \text{si } N = 2, \\ \mathcal{P}_{\text{cl}} \psi_\varepsilon & \text{si } N = 3. \end{cases} \quad (5.33)$$

On injecte maintenant W défini en (5.29) et $W_h = (\mathbf{v}_{\varepsilon,h}, 0)$ dans l'équation du résidu (5.12) et on utilise la formule de Green (2.96) pour obtenir l'égalité :

$$\begin{aligned} A(U - U_h, W) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left\{ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T + (\mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T \right\} \\ &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left\{ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T + (\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T \right\} \\ &+ \left(\mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h), \psi - \psi_{\varepsilon,h} \right)_T + \left(\mathbf{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h), \psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,h} \right)_T \Big\} \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([p_h]_E, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_T \\ &- \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([\mu \gamma_\tau (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h)]_E, \psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,h})_E - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s)} (\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_E \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{\Gamma}_I)} \left\{ (p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{u}_{s,h} \cdot \mathbf{n}_s, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_E \right. \\ &\left. - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \boldsymbol{\tau}_j)_E \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } (\varepsilon, \text{div } \mathbf{v}_\varepsilon)_\Omega &= 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{v}_\varepsilon))_{\Omega_s} + \mu(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{v}_\varepsilon)_{\Omega_d} \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\tau}_j)_{\Gamma_I} \\ &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left\{ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T + (\mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T \right\} \\ &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left\{ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T + (\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_T + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h), \psi - \psi_{\varepsilon,h} \right)_T + \left(\mathbf{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h), \psi - \psi_{\varepsilon,h} \right)_T \Big\} \\
& + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([p_h]_E, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_T \\
& - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([\mu \gamma_\tau (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h)]_E, \psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,h})_E - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s)} (\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}, \mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h})_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{\Gamma}_I)} \left\{ (p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{u}_{s,h} \cdot \mathbf{n}_s, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_E \right. \\
& \left. - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \tau_j, (\mathbf{v}_{0,\varepsilon} - \mathbf{v}_{0,\varepsilon,h}) \cdot \tau_j)_E \right\}.
\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire, de Cauchy-Schwarz, et les estimations d'interpolation de Clément du Lemme 4.22 (les Hypothèses 2.21 à 2.24 étant satisfaites) conduisent à :

$$\begin{aligned}
(\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)_\Omega & \lesssim 2\mu \|\mathbb{D}(\mathbf{e})\|_{\Omega_s} \times \|\mathbb{D}(\mathbf{v}_\varepsilon)\|_{\Omega_s} + \mu \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}\|_{\Omega_d} \times \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{\Omega_d} \\
& + \|\nabla \mathbf{e}\|_{\Omega_s} \times \|\nabla \mathbf{v}_\varepsilon\|_{\Omega_s} \\
& + \{m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_\varepsilon, \mathcal{T}_h)\} \times (\Theta + \zeta)(\|\nabla \mathbf{v}_{0,\varepsilon}\|_\Omega + \|\nabla \psi_\varepsilon\|_\Omega)
\end{aligned}$$

On utilise maintenant la propriété (5.25), on a :

$$(\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)_\Omega \lesssim (\Theta + \zeta) \left\{ m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_\varepsilon, \mathcal{T}_h) \right\} \times \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}} + \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{H}} \times \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}}. \quad (5.34)$$

On déduit alors, en tenant compte du fait que $\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}} \leq \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega}$, l'estimation :

$$\frac{(\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon)_\Omega}{\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega}} \lesssim \{m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_\varepsilon, \mathcal{T}_h)\} \times (\Theta + \zeta) + \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{H}}. \quad (5.35)$$

Enfin, les estimées (5.27) et (5.35) concluent le lemme. ■

Nous prouvons maintenant la borne supérieure de l'erreur sur la vitesse.

Lemme 5.6. (*Erreur sur la vitesse* [5]) *On suppose que la triangulation \mathcal{T}_h sur $\bar{\Omega}$ est anisotrope et satisfait les Hypothèses 2.21 à 2.24. On suppose de plus que, les Hypothèses 5.1 et 5.2 sont satisfaites sur les espaces d'approximations. Soient $\mathbf{v}_{0,\varepsilon}$, ψ_ε les fonctions du Lemme 5.5. Alors, il existe une fonction vectorielle $\mathbf{e}_0 \in [H^1(\Omega)]^N$ et une fonction $\psi_{\mathbf{e}}$, avec*

$$\begin{cases} \psi_{\mathbf{e}} \in H_0^1(\Omega_d) & \text{si } N = 2, \\ \psi_{\mathbf{e}} \in [H^1(\Omega_d)]^3 \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d) & \text{si } N = 3, \end{cases}$$

dépendant de l'erreur \mathbf{e} telles que l'estimation suivante soit satisfaite :

$$\| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}} \lesssim \{m(\mathbf{e}_0, \psi_{\mathbf{e}}, \mathcal{T}_h) + m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_{\varepsilon}, \mathcal{T}_h)^{1/2}\} \times (\Theta + \zeta). \quad (5.36)$$

Preuve. Soient $\mathbf{v}_{0,\varepsilon}$ et ψ_{ε} les fonctions du Lemme 5.5. Remarquons, d'après la formule de divergence que :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{e} = 0.$$

On pose donc :

$$W = (\mathbf{e}, -\operatorname{div} \mathbf{e}) \in \mathbf{H} \times Q. \quad (5.37)$$

Comme $\mathbf{e} \in \mathbf{H}$, alors le résultat de décomposition de Helmholtz entraîne :

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \quad (5.38)$$

où $\mathbf{e}_0 \in [H^1(\Omega)]^N$ et $\mathbf{e}_1 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s \\ \mathbf{rot} \psi_{\mathbf{e}} & \text{dans } \Omega_d \end{cases}$, avec $\psi_{\mathbf{e}} \in H_0^1(\Omega_d)$, si $N = 2$ et $\psi_{\mathbf{e}} \in [H^1(\Omega_d)]^N \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega_d)$, si $N = 3$ et satisfaisant l'estimation (5.25). Alors,

$$\begin{aligned} A(U - U_h, W) &= \mathbf{a}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) + \mathbf{b}(\mathbf{e}, -\operatorname{div} \mathbf{e}) + \mathbf{b}(\mathbf{e}, \varepsilon) \\ &= 2\mu \| \mathbb{D}(\mathbf{e}) \|_{\Omega_s}^2 - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{e})_{\Omega} + \| \operatorname{div} \mathbf{e} \|_{\Omega}^2 + \end{aligned}$$

$$+ \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{e})_{\Omega_d} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{k_j}} \| \mathbf{e} \cdot \tau_j \|_{\Gamma_I}^2.$$

On tire,

$$\begin{aligned} 2\mu \| \mathbb{D}(\mathbf{e}) \|_{\Omega_s}^2 + \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{e})_{\Omega_d} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{k_j}} \| \mathbf{e} \cdot \tau_j \|_{\Gamma_I}^2 + \| \operatorname{div} \mathbf{e} \|_{\Omega}^2 &= A(U - U_h, W) \\ &+ (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{e})_{\Omega} \end{aligned}$$

L'inégalité de Korn classique et la propriété de la matrice \mathbb{K} conduisent à l'estimation :

$$\| \nabla \mathbf{e} \|_{\Omega_s}^2 + \| \mathbf{e} \|_{\Omega_d}^2 + \| \operatorname{div} \mathbf{e} \|_{\Omega_d}^2 \lesssim A(U - U_h, W) + (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{e})_{\Omega} \quad (5.39)$$

De même, au regard des Hypothèses 5.1 et 5.2, nous pouvons définir une fonction

$\mathbf{e}_h \in \mathbf{H}_h$ par :

$$\mathbf{e}_h = \mathbf{e}_{0,h} + \mathbf{e}_{1,h}, \text{ avec } \mathbf{e}_{0,h} = \mathbf{I}_{\text{cl}}(\mathbf{e}_0),$$

$$\mathbf{e}_{1,h} = \begin{cases} \mathbf{rot} \psi_{\mathbf{e},h} & \text{dans } \Omega_d, \\ \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s, \end{cases} \quad (5.40)$$

où

$$\psi_{\mathbf{e},h} = \begin{cases} \mathbf{I}_{\text{cl}}^0 \psi_{\mathbf{e}} & \text{si } N = 2, \\ \mathcal{P}_{\text{cl}} \psi_{\mathbf{e}} & \text{si } N = 3. \end{cases} \quad (5.41)$$

Comme avant, on injecte maintenant W défini en (5.37) et $W_h = (\mathbf{e}_h, 0)$ dans l'équation du résidu (5.12) et on utilise la formule de Green (2.96) :

$$\begin{aligned} & \| \nabla \mathbf{e} \|_{\Omega_s}^2 + \| \mathbf{e} \|_{\Omega_d}^2 + \| \operatorname{div} \mathbf{e} \|_{\Omega_d}^2 \lesssim \\ & \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left\{ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_{0,h})_T + (\mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_{0,h})_T \right\} \\ & + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left\{ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_{0,h})_T + (\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_{0,h})_T \right. \\ & + \left(\mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h), \psi_{\mathbf{e}} - \psi_{\mathbf{e},h} \right)_T + \left(\mathbf{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h), \psi_{\mathbf{e}} - \psi_{\mathbf{e},h} \right)_T \left. \right\} \\ & + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([p_h]_E, (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_{0,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_T \\ & - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([\mu \gamma_\tau(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h)]_E, \psi_{\mathbf{e}} - \psi_{\mathbf{e},h})_E \\ & - \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s)} (\mathbf{J}_{E, \mathbf{n}_E}, \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_{0,h})_E \\ & + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\bar{\Gamma}_I)} \left\{ (p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{u}_{s,h} \cdot \mathbf{n}_s, (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_{0,h}) \cdot \mathbf{n}_E)_E \right. \\ & - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \tau_j, (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_{0,h}) \cdot \tau_j)_E \left. \right\} \\ & + (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{e})_\Omega + (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - g, -\operatorname{div} \mathbf{e})_\Omega. \end{aligned}$$

Rappelons que : $\| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}}^2 = \| \nabla \mathbf{e} \|_{\Omega_s}^2 + \| \mathbf{e} \|_{\Omega_d}^2 + \| \operatorname{div} \mathbf{e} \|_{\Omega_d}^2$ et
 $\operatorname{div} \mathbf{e} = g - \operatorname{div} \mathbf{u}_h$ dans Ω .

On applique maintenant les estimations d'interpolation de Clément du Lemme 4.22 (les Hypothèses 2.21 à 2.24 étant vérifiées), l'estimation obtenue sur la pression, puis la propriété (5.25) pour avoir,

$$\begin{aligned} \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}}^2 &\lesssim (\Theta + \zeta) \times m(\mathbf{e}_0, \psi_{\mathbf{e}}, \mathcal{T}_h) \times \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}} + \| \operatorname{div} \mathbf{u}_h - g \|_{\Omega}^2 \\ &+ \{ m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_{\varepsilon}, \mathcal{T}_h) \times (\Theta + \zeta) + \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}} \} \times \| g - \operatorname{div} \mathbf{u}_h \|_{\Omega}. \end{aligned}$$

Rappelons aussi que,

$$\| g - \operatorname{div} \mathbf{u}_h \|_{\Omega} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Theta_{3,T}^2 \right)^{1/2} \lesssim \Theta \leq (\Theta + \zeta), \quad (5.42)$$

donc,

$$\begin{aligned} \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}}^2 &\lesssim (\Theta + \zeta) \times m(\mathbf{e}_0, \psi_{\mathbf{e}}, \mathcal{T}_h) \times \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}} + (\Theta + \zeta) \times \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}} \\ &+ \{ m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_{\varepsilon}, \mathcal{T}_h) \times (\Theta + \zeta) + \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}} \} \times \Theta. \end{aligned}$$

Ainsi, avec l'inégalité standard $1 \lesssim m(\mathbf{e}_0, \psi_{\mathbf{e}}, \mathcal{T}_h)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}}^2 &\lesssim (\Theta + \zeta) \times m(\mathbf{e}_0, \psi_{\mathbf{e}}, \mathcal{T}_h) \times \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}} \\ &+ \{ m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_{\varepsilon}, \mathcal{T}_h) \times (\Theta + \zeta) + \| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}} \} \times \Theta. \end{aligned}$$

Enfin, l'inégalité de Young (2.105), avec une fois encore la relation standard $1 \lesssim m(., ., .)$ concluent la preuve du lemme. ■

Nous donnons maintenant le résultat principal de cette sous-section.

Théorème 5.7. (*Fiabilité* [5]) *On suppose que la triangulation \mathcal{T}_h sur $\overline{\Omega}$ est anisotrope et satisfait les Hypothèses 2.21 à 2.24. On suppose de plus que, les Hypothèses 5.1 et 5.2 sont satisfaites sur les espaces d'approximations. Soient $\mathbf{v}_{0,\varepsilon}$, ψ_{ε} , \mathbf{e}_0 et $\psi_{\mathbf{e}}$ les fonctions du Lemme 5.5 et du Lemme 5.6. Alors, la majoration globale de l'erreur est donnée par :*

$$\| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}} + \| \varepsilon \| \lesssim \{ m(\mathbf{e}_0, \psi_{\mathbf{e}_0}, \mathcal{T}_h) + m(\mathbf{v}_{0,\varepsilon}, \psi_{\varepsilon}, \mathcal{T}_h) \} \times (\Theta + \zeta). \quad (5.43)$$

Preuve. L'estimation (5.43) s'obtient en combinant les Lemmes 5.5 et 5.6. ■

Remarque 5.8. *Il est à noter que les fonctions \mathbf{e}_0 , $\psi_{\mathbf{e}_0}$, $\mathbf{v}_{0,\varepsilon}$ et ψ_{ε} intervenant dans*

les mesures d'alignement de la relation (5.43) sont des fonctions qui dépendent de la solution exacte. Ces mesures d'alignement ne peuvent donc pas être évaluées explicitement. Cependant, cela ne constitue pas un inconvénient majeur. Par exemple la mesure d'alignement $m_1(\mathbf{e}, \mathcal{T}_h)$ pour l'erreur $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ est de taille $\mathcal{O}(1)$ pour des maillages suffisamment satisfaisants [84, 90]. On attend par des expériences numériques, un comportement similaire des autres mesures d'alignements.

5.3.3 Minoration d'erreur a-posteriori

Pour une fonction $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, on pose :

$$\|\mathbf{v}\|_{H(W_T)}^2 := |\mathbf{v}|_{1, W_T \cap \bar{\Omega}_s}^2 + \|\mathbf{v}\|_{W_T \cap \bar{\Omega}_d}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{W_T \cap \bar{\Omega}_d}^2, \quad (5.44)$$

où

$$H(W_T) := \{\mathbf{v}|_{W_T} : \mathbf{v} \in \mathbf{H}\}. \quad (5.45)$$

On a le résultat suivant :

Théorème 5.9. (*Efficacité* [5]) *On suppose que la triangulation \mathcal{T}_h sur $\bar{\Omega}$ est anisotrope et satisfait les Hypothèses 2.21 à 2.24. On suppose de plus que, l'Hypothèse 5.2 est satisfaite sur les espaces d'approximations. Alors, nous avons l'estimation suivante pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$:*

$$\Theta_T \lesssim \|\mathbf{e}\|_{H(W_T)} + \|\varepsilon\|_{W_T} + \sum_{T' \in W_T} \zeta_{T'}. \quad (5.46)$$

Preuve. Nous commençons par majorer chaque terme de Θ_T . Mais avant, nous réécrivons l'équation du résidu (5.12) ci-dessus, avec $\mathbf{v}_h = \mathbf{0}$. Elle se réduit donc à :

$$\begin{aligned} A(U - U_h, W) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^s} \left\{ (\mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{v})_T + (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - g, q)_T + (\mathbf{R}_{s,T} - \mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{v})_T \right\} \\ &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^d} \left\{ (\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{v})_T + (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - g, q)_T + (\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{v})_T \right\} \\ &- \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_s)} (\mathbf{J}_{E, \mathbf{n}_E}, \mathbf{v})_E + \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Omega_d)} ([p_h]_E, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_E)_E \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\Gamma_I)} \left\{ (p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s)_E \right\} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$- \sum_{j=1}^{N-1} \left(\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j + \frac{\sqrt{k_j}}{\alpha_1} 2\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \tau_j, \mathbf{v} \cdot \tau_j \right)_E \Bigg\}.$$

• **Majoration des résidus internes.** Nous majorons les résidus internes :

1. Majoration du terme $\Theta_{1,T}$ pour $T \in \mathcal{T}_h^s$. Fixons un $T \in \mathcal{T}_h^s$ et définissons une fonction \mathbf{w}_T dans Ω par,

$$\mathbf{w}_T = \mathbf{r}_{s,T} b_T \in [H_0^1(T)]^N. \quad (5.48)$$

On remplace dans l'équation du résidu ce $W = (\mathbf{w}_T, 0)$. On a :

$$A(U - U_h, W) = (\mathbf{R}_{s,T} - \mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{w}_T)_T + (\mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{w}_T)_T. \quad (5.49)$$

On tire,

$$(\mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{w}_T)_T = A(U - U_h, W) - (\mathbf{R}_{s,T} - \mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{w}_T)_T. \quad (5.50)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} A(U - U_h, W) &= \mathbf{a}(\mathbf{e}, \mathbf{w}_T) + \mathbf{b}(\mathbf{w}_T, \varepsilon) \\ &= 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{w}_T))_T - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}_T)_T. \end{aligned}$$

Donc,

$$(\mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{w}_T)_T = 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{w}_T))_T - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}_T)_T - (\mathbf{R}_{s,T} - \mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{w}_T)_T.$$

On applique respectivement l'inégalité triangulaire et de Cauchy-Schwarz, pour avoir,

$$(\mathbf{r}_{s,T}, \mathbf{w}_T)_T \lesssim \| \mathbf{R}_{s,T} - \mathbf{r}_{s,T} \|_T \times \| \mathbf{w}_T \|_T + (|\mathbf{e}|_{1,T} + \| \varepsilon \|_T) \times \| \nabla \mathbf{w}_T \|_T.$$

On utilise maintenant les inégalités inverses (2.88) et (2.89). Ce qui donne,

$$\| \mathbf{r}_{s,T} \|_T^2 \lesssim \left\{ \| \mathbf{R}_{s,T} - \mathbf{r}_{s,T} \|_T + h_{min,T}^{-1} (|\mathbf{e}|_{1,T} + \| \varepsilon \|_T) \right\} \times \| \mathbf{r}_{s,T} \|_T. \quad (5.51)$$

En multipliant chaque membre par $h_{min,T}$, on obtient par simplification, l'estimation :

$$\Theta_{1,T} \lesssim h_{\min,T} \| \mathbf{R}_{s,T} - \mathbf{r}_{s,T} \|_T + |\mathbf{e}|_{1,T} + \| \varepsilon \|_T. \quad (5.52)$$

2. Majoration du terme $\Theta_{1,T}$ pour $T \in \mathcal{T}_h^d$. Fixons un $T \in \mathcal{T}_h^d$, puis définissons \mathbf{w}_T dans Ω en posant,

$$\mathbf{w}_T = \mathbf{r}_{d,T} b_T \in [H_0^1(T)]^N. \quad (5.53)$$

Remplaçons $W = (\mathbf{w}_T, 0)$ dans l'équation du résidu (5.47). On a,

$$A(U - U_h, W) = (\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{w}_T)_T + (\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{w}_T)_T. \quad (5.54)$$

On tire,

$$(\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{w}_T)_T = A(U - U_h, W) - (\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{w}_T)_T. \quad (5.55)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} A(U - U_h, W) &= \mathbf{a}(\mathbf{e}, \mathbf{w}_T) + \mathbf{b}(\varepsilon, \mathbf{w}_T) \\ &= \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{w}_T)_T - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}_T)_T. \end{aligned}$$

Donc,

$$(\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{w}_T)_T = \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{w}_T)_T - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}_T)_T + (\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{w}_T)_T.$$

On applique maintenant l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\begin{aligned} \| \mathbf{r}_{d,T} b_T^{1/2} \|_T^2 &\lesssim \mu \| \mathbb{K}^{-1}\mathbf{e} \|_T \times \| \mathbf{w}_T \|_T + \| \varepsilon \|_T \times \| \operatorname{div} \mathbf{w}_T \|_T \\ &+ \| \mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T} \|_T \times \| \mathbf{w}_T \|_T. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré-Friedrich (i.e. $\| \mathbf{w}_T \|_T \lesssim \| \nabla \mathbf{w}_T \|_T$), on a :

$$\begin{aligned} \| \mathbf{r}_{d,T} b_T^{1/2} \|_T^2 &\lesssim (\| \mathbb{K}^{-1}\mathbf{e} \|_T + \| \varepsilon \|_T) \times \| \nabla \mathbf{w}_T \|_T \\ &+ \| \mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T} \|_T \times \| \mathbf{w}_T \|_T \end{aligned}$$

Les inégalités inverses (2.88) et (2.97) et la relation triviale $\| \mathbf{w}_T \|_T \lesssim \| \mathbf{r}_{s,T} \|_T$

conduisent à,

$$\| \mathbf{r}_T \|_T^2 \lesssim \{ h_{min,T}^{-1} (\| \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \|_T + \| \varepsilon \|_T) + \| \mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{s,T} \|_T \} \times \| \mathbf{r}_{d,T} \|_T. \quad (5.56)$$

Par simplification et en multipliant chaque membre par $h_{min,T}$, on a l'estimé :

$$\Theta_{1,T} := h_{min,T} \| \mathbf{r}_{d,T} \|_T \lesssim \| \mathbf{e} \|_T + h_{min,T} \| \mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T} \|_T. \quad (5.57)$$

3. Majoration de $\Theta_{2,T}$. Fixons un $T \in \mathcal{T}_h$ et posons,

$$K_T = \mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \text{ et } \mathbf{w}_T = K_T b_T.$$

Notons que K_T est une fonction scalaire en dimension $N = 2$ tandis qu'en dimension $N = 3$, elle est une fonction vectorielle. Notons également que $\mathbf{rot}(\mathbf{w}_T) \in \mathbf{H}$ et $\text{div } \mathbf{rot}(\mathbf{w}_T) = 0$.

On prend $W = (\mathbf{v}, 0)$ dans l'équation du résidu, avec,

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s, \\ \mathbf{rot}(\mathbf{w}_T) & \text{dans } \Omega_d. \end{cases} \quad (5.58)$$

L'équation du résidu devient,

$$\begin{aligned} A(U - U_h, W) &= (\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{w}_T)_T + (\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{T,d}, \mathbf{w}_T)_T \\ &= (\mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_T)_T + (\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_T)_T. \end{aligned}$$

On utilise la formule de Green (2.96) pour obtenir,

$$A(U - U_h, W) = (\mathbf{rot}(\mathbf{r}_{d,T}), \mathbf{w}_T)_T + (\mathbf{rot}(\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}), \mathbf{w}_T)_T. \quad (5.59)$$

Rappelons que :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{r}_{d,T}) = \mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h + \nabla p_h) = \mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) = K_T.$$

Ainsi,

$$A(U - U_h, W) = (K_T, \mathbf{w}_T)_T + (\mathbf{rot}(\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}), \mathbf{w}_T)_T. \quad (5.60)$$

On tire,

$$(K_T, \mathbf{w}_T)_T = (\mathbf{rot}(\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}), \mathbf{w}_T)_T - A(U - U_h, W).$$

Ce qui est équivalent à,

$$\| K_T b_T^{1/2} \|_T^2 = ((\mathbf{rot}(\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}), \mathbf{w}_T)_T - A(U - U_h, W)). \quad (5.61)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} A(U - U_h, W) &= \mathbf{a}(\mathbf{e}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_T) + \mathbf{b}(\mathbf{rot} \mathbf{w}_T, \varepsilon) \\ &= \mu(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_T)_T - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{rot} \mathbf{w}_T)_T \\ &= \mu(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_T)_T. \end{aligned}$$

D'où,

$$\| K_T b_T^{1/2} \|_T^2 = (\mathbf{rot}(\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}), \mathbf{w}_T)_T - \mu(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{rot} \mathbf{w}_T)_T. \quad (5.62)$$

Inégalité triangulaire et inégalité de Cauchy-Schwarz conduisent :

$$\| K_T b_T^{1/2} \|_T^2 \lesssim \| \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \|_T \times \| \mathbf{rot} \mathbf{w}_T \|_T + \| \mathbf{rot}(\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}) \|_T \times \| \mathbf{w}_T \|_T.$$

Comme avant, on applique les inégalités inverses (2.88) et (2.97), les relations triviales $\| \mathbf{w}_T \|_T \leq \| K_T \|_T$ et $\| \mathbf{rot} \mathbf{w}_T \|_T \lesssim \| \nabla \mathbf{w}_T \|_T$ pour obtenir,

$$\| K_T \|_T^2 \lesssim \{ h_{min,T}^{-1} \| \mathbb{K}^{-1} \mathbf{e} \|_T + \| \mathbf{rot}(\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}) \|_T \} \times \| K_T \|_T.$$

En simplifiant, puis, en multipliant chaque membre par $h_{min,T}$, on a l'estimation,

$$\Theta_{2,T} := h_{min,T} \| K_T \|_T \lesssim \| \mathbf{e} \|_T + h_{min,T} \| \mathbf{rot}(\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T}) \|_T. \quad (5.63)$$

4. Majoration de $\Theta_{3,T}$. Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on a :

$$\Theta_{3,T}^2 := \| g - \operatorname{div} \mathbf{u}_h \|_T^2.$$

Rappelons que,

$$g - \operatorname{div} \mathbf{u}_h := \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{u}_h = \operatorname{div} \mathbf{e}.$$

Donc,

$$\Theta_{3,T} \lesssim \|\nabla \mathbf{e}\|_T. \quad (5.64)$$

• **Majoration des résidus inter-éléments dus au couplage.** On majore maintenant les termes dus au couplage.

1. Majoration du terme $\Theta_{4,T}$. Soit $T \in \mathcal{T}_h$. Fixons une arête ou une face $E \in \mathcal{E}(T)$ puis considérons pour j fixé dans $\{1, \dots, N-1\}$,

$$\mathbf{w}_E := (F_{ext}(r_E)b_E)\tau_j \in [H_0^1(W_E)]^N, \quad (5.65)$$

où $r_E := \mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j + \frac{\sqrt{k_j}}{\alpha_1} 2\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \tau_j$ pour $j = 1, \dots, N-1$ et $W_E = T_s \cup T_d$. T_s et T_d sont les deux éléments du maillage partageant E . Noter que $\mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_s = 0$ sur Γ_I . On remplace dans l'équation du résidu (5.47), $W = (\mathbf{w}_E, 0)$. Alors

$$\begin{aligned} A(U - U_h, W) &= (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{w}_E)_{T_s} + (\mathbf{f}_h + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h, \mathbf{w}_E)_{T_s} \\ &+ (\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h, \mathbf{w}_E)_{T_d} + \sum_{j=1}^{N-1} (r_E, \mathbf{w}_E \cdot \tau_j)_E \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_E \cdot \tau_j)_E + (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{w}_T)_{T_d}. \end{aligned}$$

On tire donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} (r_E, \mathbf{w}_E \cdot \tau_j)_E &= -A(U - U_h, W) + (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{w}_E)_{T_s} \\ &+ (\mathbf{f}_h + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h, \mathbf{w}_E)_{T_s} \\ &+ (\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h, \mathbf{w}_E)_{T_d} \\ &+ (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{w}_T)_{T_d} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_E \cdot \tau_j)_E. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$A(U - U_h, W) = \mathbf{a}(\mathbf{e}, \mathbf{w}_E) + \mathbf{b}(\mathbf{w}_E, \varepsilon),$$

d'où

$$\begin{aligned} A(U - U_h, W) &= 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{w}_E))_{T_s} + \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{w}_E)_{T_d} \\ &\quad - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}_E)_{W_E} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_E \cdot \tau_j)_E. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} (r_E, \mathbf{w}_E \cdot \tau_j)_E &= (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{w}_E)_{T_s} \\ &\quad + (\mathbf{f}_h + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h, \mathbf{w}_E)_{T_s} \\ &\quad + (\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h - \nabla p_h, \mathbf{w}_E)_{T_d} \\ &\quad + (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{w}_T)_{T_d} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_E \cdot \tau_j)_E \\ &\quad - 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{w}_E))_{T_s} - \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{w}_E)_{T_d} \\ &\quad + (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}_E)_{W_E} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{k_j}} (\mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j, \mathbf{w}_E \cdot \tau_j)_E. \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire et de Cauchy-Schwarz conduisent à :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} (r_E, \mathbf{w}_E \cdot \tau_j)_E &\lesssim \|\mathbf{R}_{s,T_s} - \mathbf{r}_{s,T_s}\|_{T_s} \times \|\mathbf{w}_E\|_{T_s} + \|\mathbf{r}_{s,T_s}\|_{T_s} \times \|\mathbf{w}_E\|_{T_s} \\ &\quad + \|\mathbf{R}_{d,T_d} - \mathbf{r}_{d,T_d}\|_{T_d} \times \|\mathbf{w}_E\|_{T_d} + \|\mathbf{r}_{d,T_d}\|_{T_d} \times \|\mathbf{w}_E\|_{T_d} + \\ &\quad + \|\mathbb{D}(\mathbf{e})\|_{T_s} \times \|\mathbb{D}(\mathbf{w}_E)\|_{T_s} + \|\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}\|_{T_d} \times \|\mathbf{w}_E\|_{T_d} + \\ &\quad + \|\varepsilon\|_{W_E} \times \|\operatorname{div} \mathbf{w}_E\|_{W_E} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu\alpha_1}{\sqrt{k_j}} \|\mathbf{e} \cdot \tau_j\|_E \times \|\mathbf{w}_E\|_E. \end{aligned}$$

La continuité de l'opérateur trace et l'inégalité $\|\mathbb{D}(\cdot)\|_{T_s} \lesssim \|\nabla(\cdot)\|_{T_s}$ conduisent à,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} (r_E, \mathbf{w}_E \cdot \tau_j)_E &\lesssim \|\mathbf{R}_{s,T_s} - \mathbf{r}_{s,T_s}\|_{T_s} \times \|\mathbf{w}_E\|_{T_s} + \|\mathbf{r}_{s,T_s}\|_{T_s} \times \|\mathbf{w}_E\|_{T_s} \\ &\quad + \|\mathbf{R}_{d,T_d} - \mathbf{r}_{d,T_d}\|_{T_d} \times \|\mathbf{w}_E\|_{T_d} + \|\mathbf{r}_{d,T_d}\|_{T_d} \times \|\mathbf{w}_E\|_{T_d} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\nabla(\mathbf{e})\|_{T_s} \times \|\nabla(\mathbf{w}_E)\|_{T_s} + \|\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}\|_{T_d} \times \|\mathbf{w}_E\|_{T_d} \\
& + \|\varepsilon\|_{W_E} \times \|\nabla\mathbf{w}_E\|_{W_E}.
\end{aligned}$$

Fixons $T \equiv T_s$ puis appliquons maintenant les inégalités inverses (2.90), (2.98) et (2.99), On a :

$$\begin{aligned}
\|r_E\|_E^2 & \lesssim h_{E,T}^{1/2} \{ \|\mathbf{R}_{s,T_s} - \mathbf{r}_{s,T_s}\|_{T_s} + \|\mathbf{r}_{s,T_s}\|_{T_s} \} \times \|r_E\|_E \\
& + h_{E,T}^{1/2} \{ \|\mathbf{R}_{d,T_d} - \mathbf{r}_{d,T_d}\|_{T_d} + \|\mathbf{r}_{d,T_d}\|_{T_d} \} \times \|r_E\|_E \\
& + h_{E,T}^{1/2} h_{min,T}^{-1} \|\nabla\mathbf{e}\|_{T_s} \times \|r_E\|_E + h_{E,T}^{1/2} h_{min,T}^{-1} \|\mathbf{e}\|_{T_d} \times \|r_E\|_E \\
& + h_{E,T}^{1/2} h_{min,T}^{-1} \|\varepsilon\|_{T_s} \times \|r_E\|_E + h_{E,T}^{1/2} h_{min,T}^{-1} \|\varepsilon\|_{T_d} \times \|r_E\|_E.
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Rappelons que

$$h_E = \frac{h_{E,T_s} + h_{E,T_d}}{2}, \text{ donc } h_{E,T}^{1/2} \leq \sqrt{2} h_E^{1/2}.$$

Enfin, en multipliant chaque membre de l'inégalité (5.66) par $h_E^{-1/2} h_{min,T}$ puis en utilisant les estimations (5.51) et (5.56), on déduit que :

$$\Theta_{4,T} \lesssim \|\mathbf{e}\|_{H(W_T)} + \|\varepsilon\|_{W_T} + \sum_{T' \subset W_E} \zeta_{T'}. \tag{5.67}$$

2. Majoration du terme $\Theta_{5,T}$. Même considération que la démonstration précédente. On prend ici

$$r_E := p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s \tag{5.68}$$

$$\mathbf{w}_E := (F_{ext}(r_E) b_E) \mathbf{n}_s \in [H_0^1(W_E)]^N \tag{5.69}$$

Notons que $\mathbf{w}_E \cdot \tau_j = 0$, pour tous $j = 1, \dots, N$. On a avec ces considérations,

$$\begin{aligned}
A(U - U_h, W) & = (\mathbf{R}_{s,T} - \mathbf{r}_{s,T_s}, \mathbf{w}_E)_{T_s} + (\mathbf{r}_{s,T_s}, \mathbf{w}_E)_{T_s} \\
& + (\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T_d}, \mathbf{w}_E)_{T_d} + (\mathbf{r}_{d,T_d}, \mathbf{w}_E)_{T_d} \\
& + (r_E, \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_s)_E.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
A(U - U_h, W) & = \mathbf{a}(\mathbf{e}, \mathbf{w}_E) + \mathbf{b}(\mathbf{w}_E, \varepsilon) \\
& = 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{w}_E))_{T_s} + \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{w}_E)_{T_d} - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}_E)_{W_E}.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
(r_E, \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_s)_E &= 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{w}_E))_{T_s} + \mu(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{w}_E)_{T_d} - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}_E)_{W_E} \\
&- (\mathbf{R}_{s,T} - \mathbf{r}_{s,T_s}, \mathbf{w}_E)_{T_s} - (\mathbf{r}_{s,T_s}, \mathbf{w}_E)_{T_s} \\
&- (\mathbf{R}_{d,T} - \mathbf{r}_{d,T_d}, \mathbf{w}_E)_{T_d} + (\mathbf{r}_{d,T_d}, \mathbf{w}_E)_{T_d} \\
&- (r_E, \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_s)_E.
\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités inverses (2.90), (2.98) et (2.99) conduisent à :

$$\begin{aligned}
\frac{h_{min,T}}{h_E} \|r_E\|_E &\lesssim |\mathbf{e}|_{1,T} + \|\varepsilon\|_T + \|\mathbf{e}\|_{T_d} + \|\varepsilon\|_{T_d} \\
&+ h_{min,T} (\|\mathbf{R}_{s,T} - \mathbf{r}_{s,T}\|_T + \|\mathbf{R}_{d,T_d} - \mathbf{r}_{d,T_d}\|_{T_d}) \\
&+ h_{min,T} (\|\mathbf{r}_{s,T}\|_T + \|\mathbf{r}_{d,T_d}\|_{T_d}).
\end{aligned}$$

Les estimations (5.51) et (5.56) conduisent finalement à :

$$\Theta_{5,T} \lesssim \|\mathbf{e}\|_{H(W_T)} + \|\varepsilon\|_{W_T} + \sum_{T' \subset W_E} \zeta_{T'}. \quad (5.70)$$

• **Majoration des résidus inter-éléments (en dehors de l'interface).** On majore ici les termes liés au saut.

$$1. \text{ Majoration du terme } \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \Omega_s)} \frac{h_{min,T}}{h_E^{1/2}} \|\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}\|_E.$$

Soit $T_1 \in \mathcal{T}_h$ et $E \in \mathcal{E}_h(\partial T_1 \cap \Omega_s)$. Notons $w_E = T_1 \cup T_2$, avec $T_2 \in \mathcal{T}_h^s$ et $\partial T_1 \cap \partial T_2 = E$.

Rappelons que $\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} \in [\mathbb{P}^k(E)]^N$. Considérons $\mathbf{w}_E = F_{ext}(\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E})b_E \in [H_0^1(W_E)]^N$.

Remplaçons dans l'équation du résidu (5.47), $W = (\mathbf{w}_E, 0)$. On a :

$$\begin{aligned}
A(U - U_h, W) &= (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{w}_E)_{W_E} + (\mathbf{f}_h + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h, \mathbf{w}_E)_{W_E} \\
&+ (\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}, \mathbf{w}_E)_E.
\end{aligned}$$

On tire

$$\begin{aligned}
(\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E}, \mathbf{w}_E)_E &= A(U - U_h, W) - (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{w}_E)_{W_E} - (\mathbf{f}_h + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h, \mathbf{w}_E)_{W_E} \\
&= 2\mu(\mathbb{D}(\mathbf{e}), \mathbb{D}(\mathbf{w}_E))_{W_E} - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}_E)_{W_E} \\
&- (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{w}_E)_{W_E} - (\mathbf{f}_h + 2\mu \operatorname{div} \mathbb{D}(\mathbf{u}_h) - \nabla p_h, \mathbf{w}_E)_{W_E}.
\end{aligned}$$

Fixons $T \equiv T_1$ puis utilisons les inégalités inverses (2.90), (2.98), (2.99) et l'estimation (5.51), on a :

$$\frac{h_{min,T}}{h_E^{1/2}} \| \mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} \|_E \lesssim | \mathbf{e} |_{1,W_E} + \| \varepsilon \|_{W_E} + \sum_{T' \subset W_E} \zeta_{T'}. \quad (5.71)$$

2. Majoration du terme $\frac{h_{min,T}}{h_E^{1/2}} \| [p_h]_E \|_E$, pour $T \in \mathcal{T}_h^d$ et $E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \Omega_d)$.

Soit $T_1 \in \mathcal{T}_h^d$ et $E \in \mathcal{E}_h(\partial T_1 \cap \Omega_d)$. Désignons par T_2 l'autre élément qui partage E avec T_1 puis fixons $T \equiv T_1$. Posons

$$\mathbf{w}_E := F_{ext}([p_h]_E) b_E \mathbf{n}_E \in [H_0^1(W_E)]^N \quad (5.72)$$

D'après l'équation du résidu (5.47), on a

$$([p_h]_E, \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E)_E = A(U - U_h, W) - (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{w}_E)_{W_E} - (\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h + \nabla p_h, \mathbf{w}_E)_{W_E}$$

et

$$A(U - U_h, W) = \mu(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{w}_E)_{W_E} - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}_E)_{W_E}$$

donc,

$$\begin{aligned} ([p_h]_E, \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{n}_E)_E &= \mu(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{w}_E)_{W_E} - (\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}_E)_{W_E} \\ &- (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{w}_E)_{W_E} (\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h + \nabla p_h, \mathbf{w}_E)_{W_E}. \end{aligned}$$

Inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, les inégalités inverses (2.90), (2.98), (2.99) et l'estimation (5.56) conduisent à :

$$\frac{h_{min,T}}{h_E^{1/2}} \| [p_h]_E \|_E \lesssim \| \mathbf{e} \|_{W_E} + \| \varepsilon \|_{W_E} + \sum_{T' \subset W_E} \zeta_{T'}. \quad (5.73)$$

Au total, les estimations (5.52), (5.57), (5.63) (5.64), (5.67), (5.70) et (5.73) conduisent directement à l'estimé du Théorème 5.7. ■

Remarque 5.10. *La minoration de l'erreur locale est obtenue indépendamment du caractère anisotrope du maillage. Raison pour laquelle, souvent, pour les calculs, on utilise les estimateurs sans considérer les mesures d'alignement. Ce choix est pratiquement justifié dans le cadre de la mise en œuvre de stratégies de raffinement adaptatifs.*

5.3.4 Application aux discrétisations isotropes

Dans le cas d'une discrétisation isotrope, les conclusions tiennent pour $h_{min,T} \sim h_E \sim h_T \sim \text{diam}(E)$, où $E \in \mathcal{E}(T)$ et la mesure d'alignement $m(.,.,.) \sim 1$.

1. Les indicateurs d'erreur locaux sont donnés par,

$$\Theta_T := \left\{ \sum_{i=1}^6 \Theta_{i,T}^2 \right\}^{1/2}, \quad (5.74)$$

avec,

$$\begin{aligned} \Theta_{1,T}^2 &:= \begin{cases} h_T^2 \| \mathbf{r}_{s,T} \|_T^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \\ h_T^2 \| \mathbf{r}_{d,T} \|_T^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d, \end{cases} \\ \Theta_{2,T}^2 &:= \begin{cases} h_T^2 \| \mathbf{rot}(\mathbf{f}_h - \mu \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \|_T^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d, \\ 0 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \end{cases} \\ \Theta_{3,T}^2 &:= \| g - \text{div } \mathbf{u}_h \|_T^2, \\ \Theta_{4,T}^2 &:= \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \bar{\Gamma}_I)} \text{diam}(E) \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \| \mathbf{u}_{s,h} \cdot \tau_j + \frac{\sqrt{k_j}}{\alpha_1} 2\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \tau_j \|_E^2 \right\}, \\ \Theta_{5,T}^2 &:= \sum_{E \in \partial T \cap \bar{\Gamma}_I} \text{diam}(E) \| p_{d,h} - p_{s,h} + 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_{s,h}) \cdot \mathbf{n}_s \|_E^2, \\ \Theta_{6,T}^2 &:= \begin{cases} \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \bar{\Omega}_s)} \text{diam}(E) \| \mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} \|_E^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h(\partial T \cap \Omega_d)} \text{diam}(E) \| [p_h]_E \|_E^2 & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d. \end{cases} \end{aligned}$$

2. L'estimateur d'erreur a-posteriori isotrope est donc défini par :

$$\Theta := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Theta_T^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.75)$$

3. Les termes d'approximation locaux deviennent :

$$\zeta_T := \begin{cases} h_T \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^s, \\ h_T (\| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_T + \| \mathbf{rot}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \|_T) & \text{si } T \in \mathcal{T}_h^d. \end{cases}$$

Ainsi, le terme d'approximation global est défini par,

$$\zeta^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \zeta_T^2.$$

Nous rappelons que h_T est le diamètre de T (voir Figure 2.8). Avec ces définitions, la minoration de l'erreur locale du Théorème 5.9 tient pour chaque élément isotrope T , alors que la majoration globale de l'erreur du Théorème 5.7 se réduit à l'estimé,

$$\| \mathbf{e} \|_{\mathbf{H}} + \| \varepsilon \| \lesssim \Theta + \zeta. \quad (5.76)$$

Remarque 5.11. *La famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori définie en (5.74) pour le cas, où la discrétisation est isotrope semble être nouvelle. Cette famille est une amélioration de celle proposée dans le papier [15]. En effet, il n'est plus nécessaire, en dehors de la condition (1.4), de supposer que le tenseur de perméabilité \mathbb{K} est suffisamment régulière et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\mathbb{K}(x)z|_{\mathbb{R}^N} \leq C|z|_{\mathbb{R}^N}$ pour presque tout $x \in \Omega_d$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^N$.*

5.4 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre, une analyse d'erreur a-posteriori de type résiduel. Nous avons considéré une discrétisation anisotrope. La méthode d'éléments finis mixtes est conforme pour toutes les inconnues. La famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori obtenue est à la fois fiable et efficace sous certaines hypothèses théoriques faites sur les mailles et sur les espaces d'approximations. Nous avons remarqué que la majoration de la norme de l'erreur globale dépend d'un bon alignement du maillage anisotrope avec une solution anisotrope donnée. La minoration de la semi-norme de l'erreur locale est obtenue indépendamment du caractère anisotrope du maillage. Enfin, nous avons fait une application des résultats obtenus dans le cas où la discrétisation isotrope. La majoration de la norme de l'erreur globale tient sans condition. La famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori obtenue pour ce cas spécifique est différente des celles proposées dans les papiers [15, 46, 54, 65]. De plus, elle est une amélioration de celle obtenue dans [15].

Quelques résultats numériques

Sommaire

6.1 Domaines et maillages	186
6.2 Convergence dans Ω_s	188
6.3 Convergence dans Ω_d	190
6.4 Les courbes d'isovaleurs	190
6.5 Matrice de rigidité	190
6.6 Représentation des solutions exactes	193

6.1 Domaines et maillages

Considérons l'application $\phi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \phi(x, y) = x^2(x-1)^3y^2(y-1)^2 \in \mathbb{R}$ sur le carré $\Omega =]0, 1[^2 \cup]1, 2[^2$ comme le montre la Figure 6.1.

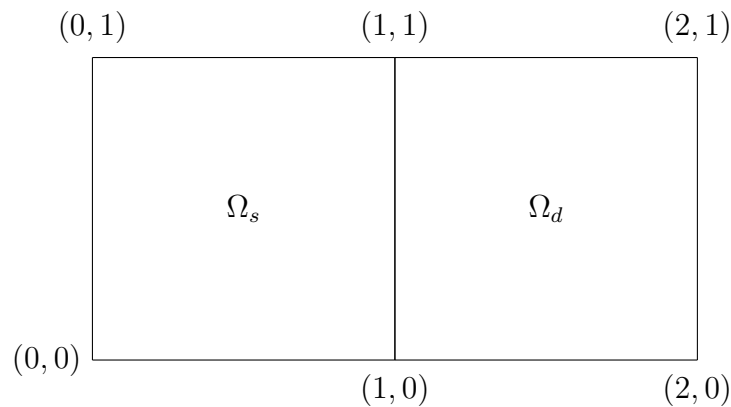


FIGURE 6.1 – Le domaine Ω en $2d$.

Son rotationnel est défini par $\mathbf{rot}\phi = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \mathbf{u} = (u_1, u_2)$, avec,

$$u_1(x, y) := -2(-1+x)^3x^2(-1+y)y(-1+2y) \quad (6.1)$$

$$u_2(x, y) := (-1+x)^2x(-2+5x)(-1+y)^2y^2 \quad (6.2)$$

Fixons $\mu = 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{I}$ et prenons une pression quadratique $p \in L^2(\Omega)$ par,

$$p(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{y^2}{2} - 1. \quad (6.3)$$

De plus,

$$\int_{\Omega} p(x, y) dx dy = 0 \quad \text{et} \quad \nabla p = (2x - 2y, -2x + y). \quad (6.4)$$

La solution exacte (\mathbf{u}, p) vérifie bien les propriétés suivantes :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (6.6)$$

avec les conditions d'interface sur Γ_I ($\Gamma_I : x = 1$),

$$\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n}_d = 0 \quad \text{sur } \Gamma_I, \quad (6.7)$$

$$p_s - 2\mu \mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}_s^{Tr} = p_d \quad \text{sur } \Gamma_I, \quad (6.8)$$

$$\frac{\sqrt{k_j}}{\alpha_1} 2\mathbf{n}_s \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}_s) \cdot \tau_j^{Tr} = -\mathbf{u}_s \cdot \tau_j \quad \text{sur } \Gamma_I, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (6.9)$$

Dès lors le second membre $\mathbf{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ dans Ω_s est donné par,

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 4(-1+x)(-1+2y)(-6x^3 + 3x^4 + (-1+y)y - 8x(-1+y)y, \\ &\quad + x^2(3 + 10(-1+y)y)) + 2x - 2y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= -2(9(-1+y)^2y^2 - 12x^3(1 + 6(-1+y)y) + 5x^4(1 + 6(-1+y)y) \\ &\quad - 2x(1 + 6(-1+y)y(1 + 3(-1+y)y)) + x^2(9 + 6(-1+y)y(9 + 5(-1+y)y))) \\ &\quad - 2x + y, \end{aligned}$$

tandis que dans Ω_d , le second membre $\mathbf{k}(x, y) = (k_1(x, y), k_2(x, y))$ est donné par :

$$\begin{aligned} k_1(x, y) &= (-1 + x)^2 x (-2 + 5x) (-1 + y)^2 y^2 + 2x - 2y, \\ k_2(x, y) &= (-1 + x)^2 x (-2 + 5x) (-1 + y)^2 y^2 - 2x + y. \end{aligned}$$

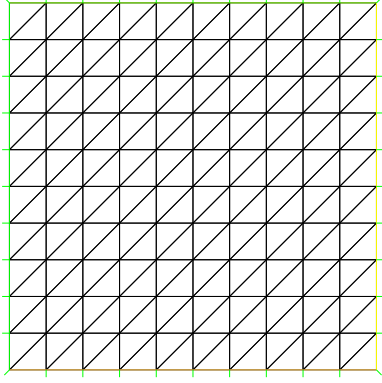


FIGURE 6.2 – Maillage uniforme sur le carré unité, avec $n = 200$.

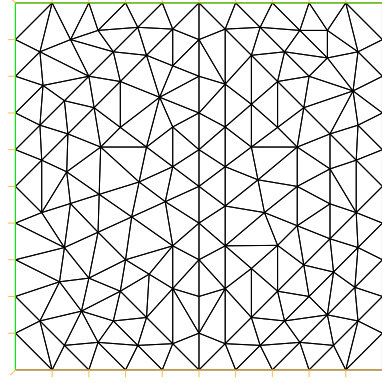


FIGURE 6.3 – Maillage non structuré sur le carré unité, avec $n = 200$.

Nous étudions ici la convergence de la vitesse et de la pression dans chaque sous domaine sur une triangulation $\mathcal{T}_{1/200}$ pour les éléments finis non-conformes de Crouzeix-Raviart. Les résultats obtenus sont cohérents, comme le montrent les Figures 6.5, 6.6, 6.7 et 6.8. Nous représentons ensuite sur la même triangulation, les courbes d'isovaleurs de chaque composante de la vitesse dans Ω_l , $l = s$ ou d . Enfin, nous étudions la structure de la matrice de rigidité dans Ω sur une triangulation uniforme (Figure 6.4). Ce qui montre l'efficacité de la méthode numérique employée.

6.2 Convergence dans Ω_s

Nous étudions ici la convergence de la vitesse et de la pression dans le milieu fluide Ω_s . L'ordre de convergence en norme L^2 est de 2 pour la vitesse et d'ordre 1 pour la pression.

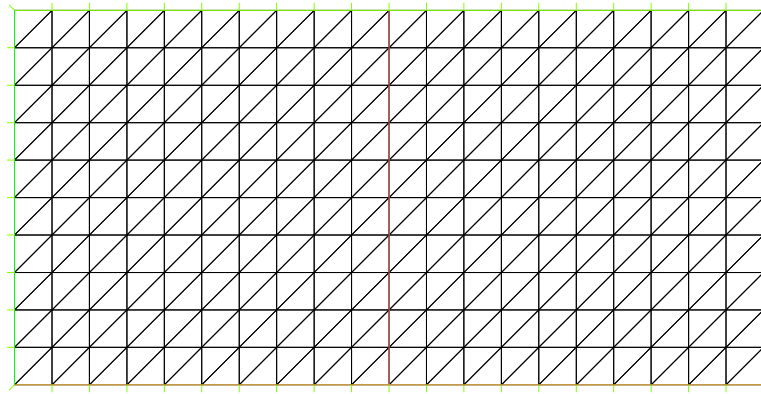


FIGURE 6.4 – Maillage uniforme sur le domaine couplé, avec $n = 400$.

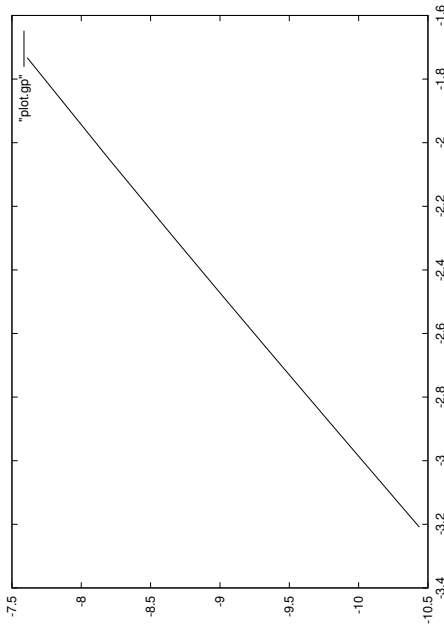


FIGURE 6.5 – Erreur sur la vitesse dans Ω_s en échelle log/log.

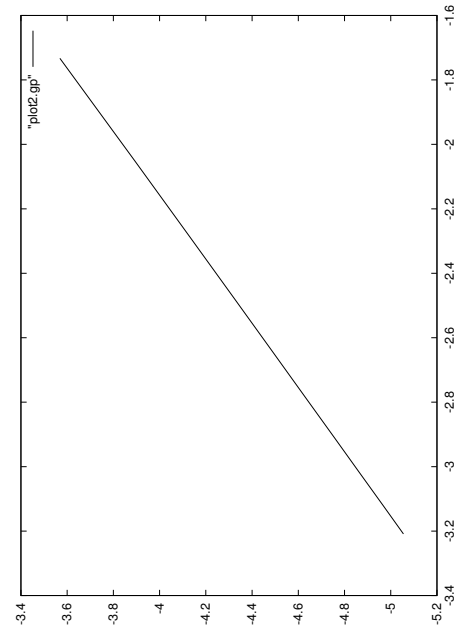


FIGURE 6.6 – Erreur sur la pression dans Ω_s en échelle log/log.

6.3 Convergence dans Ω_d

Nous étudions ici la convergence de la vitesse et de la pression dans le milieu poreux Ω_d . L'ordre de convergence en norme L^2 est de 2 pour la vitesse et d'ordre 1 pour la pression.

6.4 Les courbes d'isovaleures

6.5 Matrice de rigidité

Nous étudions maintenant la structure de la matrice de rigidité. Nous constatons que, lorsque le pas de discrétisation h devient de plus en plus infiniment petit, la matrice devient de plus en plus creuse. Ce qui montre en partie l'efficacité de la méthode numérique employée.

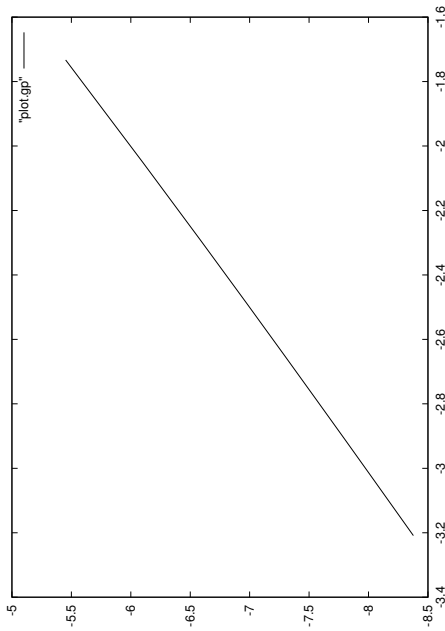


FIGURE 6.7 – Erreur sur la vitesse dans Ω_d en échelle log/log.

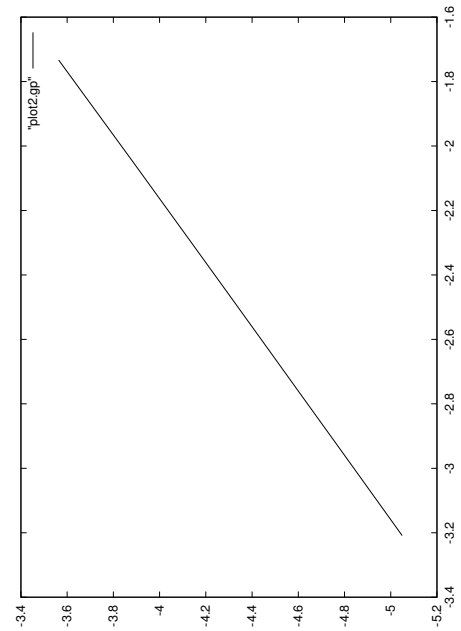


FIGURE 6.8 – Erreur sur la pression dans Ω_d en échelle log/log.

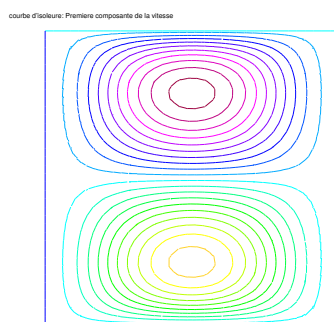


FIGURE 6.9 – Courbe d'isovaleur pour la composante u_1 de la vitesse dans Ω_s sur 10 itérations.

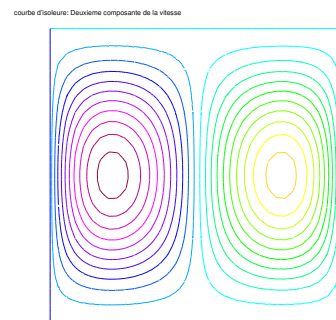
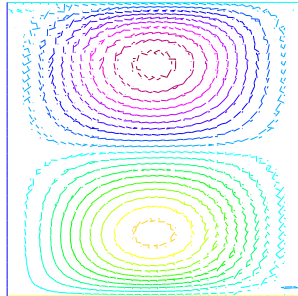
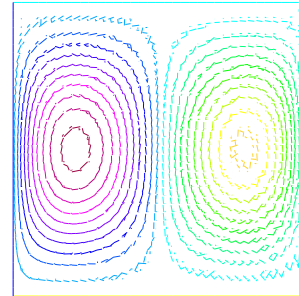


FIGURE 6.10 – Courbe d'isovaleur pour la composante u_2 de la vitesse dans Ω_s sur 10 itérations.

courbe d'isovaleur: Première composante de la vitesse

FIGURE 6.11 – Courbe d'isovaleur pour la composante u_1 de la vitesse dans Ω_d sur 10 itérations.

courbe d'isovaleur: Deuxième composante de la vitesse

FIGURE 6.12 – Courbe d'isovaleur pour la composante u_2 de la vitesse dans Ω_d sur 10 itérations.

Paramètre h	% des Coefs $\neq 0$
1/16	79.668827
1/22	66.405634
1/28	41.751001
1/34	28.652204
1/40	20.873193
1/46	15.879941
1/52	12.485349
1/58	10.073294
1/66	08.298201
1/70	06.954061

TABLE 6.1 – Tableau montrant la structure de la matrice de rigidité sur 10 itérations.

6.6 Représentation des solutions exactes

Nous représentons dans cette section les solutions exactes à savoir : la vitesse \mathbf{u} et la pression p . Les seconds membres \mathbf{f}_s et \mathbf{f}_d seront aussi représentés.

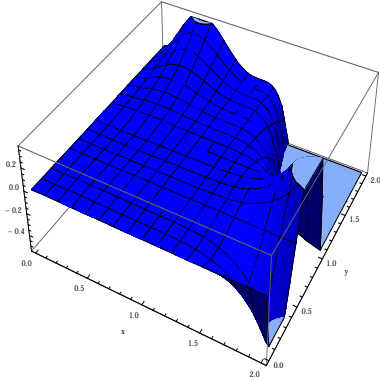


FIGURE 6.13 – Composante u_1 de la solution exacte \mathbf{u} dans Ω .

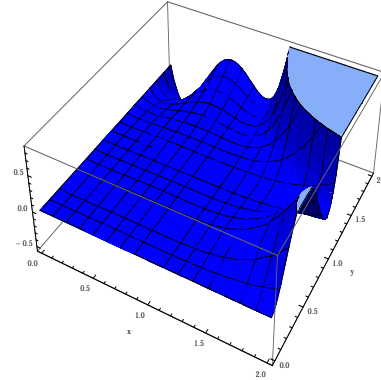


FIGURE 6.14 – Composante u_2 de la solution exacte \mathbf{u} dans Ω .

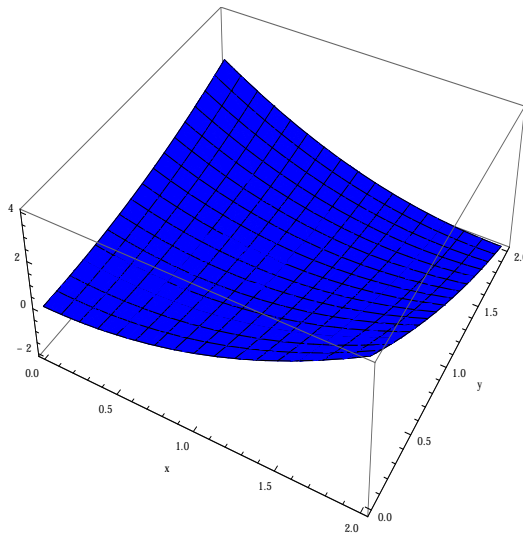


FIGURE 6.15 – Représentation graphique de la pression sur le domaine Ω .

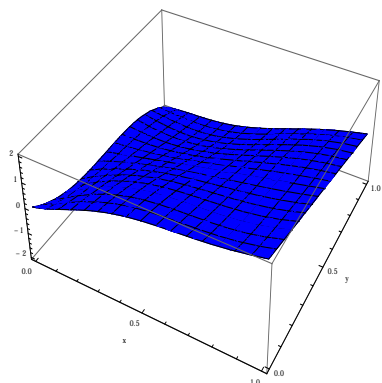


FIGURE 6.16 – Représentation graphique de la première composante f_1 dans Ω_s .

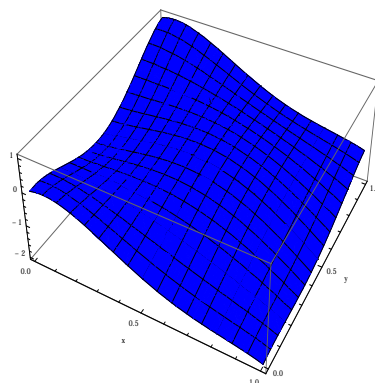


FIGURE 6.17 – Représentation graphique de la deuxième composante f_2 dans Ω_s .

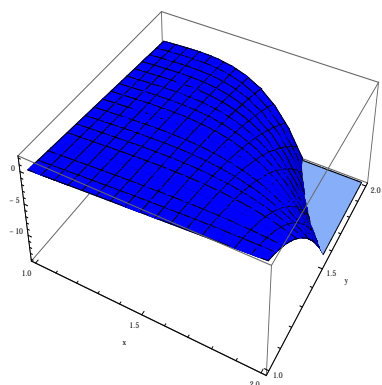


FIGURE 6.18 – Représentation graphique de la première composante f_1 dans Ω_d .

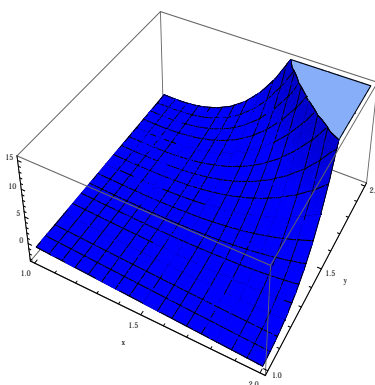


FIGURE 6.19 – Représentation graphique de la deuxième composante f_2 dans Ω_d .

Conclusion et Perspectives

Sommaire

7.1 Conclusion	195
7.2 Perspectives	196

7.1 Conclusion

Nous avons analysé dans cette thèse, des estimateurs d'erreur a-posteriori de type résiduel. Nous avons considéré les équations du problème de transmission Stokes-Darcy, lesquelles modélisent l'écoulement d'un fluide visqueux vers un milieu poreux à travers une interface. Nous avons utilisé une formulation faible sans multiplicateurs de Lagrange sur l'interface. La méthode d'éléments finis que nous avons employée est, soit conforme, soit non-conforme. Les investigations couvrent les domaines $2d$ et $3d$.

Dans un premier temps, nous avons considéré une discrétisation isotrope. Nous avons discrétisé les équations du problème couplé Stokes-Darcy, via une variante de la méthode d'éléments finis $[\mathbb{P}^1]^N$ non-conformes de Crouzeix-Raviart pour approcher la vitesse du fluide dans Ω . Nous avons approché la pression du fluide dans l'espace des fonctions constantes par morceaux. Nous avons démontré la stabilité du problème discret associé via le théorème de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi. Nous avons développé une analyse d'erreur a-posteriori. Les indicateurs d'erreur obtenus sont de type résiduel. Nous avons démontré que la famille formée de ces indicateurs d'erreur est à la fois fiable et efficace.

Dans un second temps, nous avons considéré une extension de ces résultats à une discrétisation anisotrope. Nous avons considéré une famille de maillages où certaines mailles peuvent violer la contrainte de l'angle minimum. Avec les mêmes éléments finis que précédemment, nous avons discrétisé les équations du problème couplé Stokes-

Darcy en admettant des maillages anisotropes (applatisssements non bornés). Nous avons utilisé une généralisation de l'inégalité de Korn discrète pour démontrer la stabilité du problème discret associé. Nous avons élaboré des indicateurs d'erreur a-posteriori de type résiduel, avec lesquels nous avons fait une analyse d'erreur a-posteriori. En outre, nous avons démontré que la famille constituée de ces indicateurs d'erreur est efficace et nous avons prouvé une majoration globale de l'erreur sur la pression. La majoration globale de l'erreur dépend de la norme de l'erreur sur la vitesse et d'une mesure dite mesure d'alignement. La minoration locale de l'erreur ne dépend pas du caractère anisotrope du maillage considéré.

Entre autres, nous avons étudié une méthode d'approximation conforme à l'aide d'une discrétisation anisotrope. Nous avons travaillé dans un cadre général et abstrait. Nous avons développé une analyse d'erreur a-posteriori de type résiduel. La famille d'indicateurs d'erreur a-posteriori est optimale, sous certaines hypothèses théoriques faites sur les mailles et sur les espaces d'approximations. Nous avons constaté que la borne supérieure de l'erreur dépend d'un alignement approprié du maillage anisotrope avec une solution anisotrope donnée. La minoration locale de l'erreur est obtenue indépendamment de cette mesure d'alignement. Dans le cas particulier des maillages isotropes, cette mesure d'alignement est équivalente à l'unité. La majoration globale de l'erreur tient alors sans condition.

Afin de faciliter le processus d'élaboration de ces estimateurs d'erreur a-posteriori, nous avons démontré un résultat de décomposition de Helmholtz spéciale des éléments de l'espace vitesse considéré ; nous avons établi un résultat de régularité de la vitesse du fluide dans Ω_d ; puis nous avons construit un opérateur d'interpolation de Oswald adéquat qui préserve la continuité de la vitesse du fluide à travers l'interface.

Les résultats présentés dans le chapitre 3 ont donné lieu à un article publié dans le journal **Afrika Matematika** [7]. Les résultats présentés dans les chapitres 4 et 5 ont donné lieu à des préprints [5, 6], lesquels sont en cours de soumission.

7.2 Perspectives

Dans la suite, plusieurs perspectives à ce travail méritent d'être abordées :

1. Trouver des exemples d'éléments finis mixtes anisotropes pouvant satisfaire les hypothèses théoriques (5.1) et (5.2) faites sur les espaces d'approximations ;
2. Achever l'analyse d'erreur a-posteriori introduite dans le chapitre 4 ;
3. Mettre en œuvre, à l'aide de ces indicateurs, un algorithme de raffinement adap-

tatif de maillage, avec applications à des problèmes concrets ;

4. Faire une extension au cas non-stationnaire [58] et au problème Stokes-Darcy-Brinkman [33, 45, 81, 118, 119] ;
5. Trouver d'autres types d'estimateurs d'erreur a-posteriori.

Bibliographie

- [1] B. Achchab, A. Agouzal, J. Baranger, and J. Maitre. Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique. Application aux éléments finis mixtes. *Numer. Math.*, 80 :159–179, 1998.
- [2] Y. Achdou and C. Bernardi. Un schéma de volumes ou éléments finis adaptatif pour les équations de Darcy à perméabilité variable. *C. R. Acad. Paris*, 2001.
- [3] Y. Achdou, C. Bernardi, and F. Coquel. A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy's equations. *Numer. Math.*, 96 :17–42, 2003.
- [4] M. Afif, A. Bergam, Z. Mghazli, and R. Verfürth. A posteriori estimators of the finite volume discretization of an elliptic problem. *Numer. Alg.*, 34 :127–136, 2003.
- [5] B. Ahounou, W. Houedanou, and S. Nicaise. A posteriori error estimation for the Stokes-Darcy coupled problem on anisotropic meshes. *Préprint. Rapport de Stage, Laboratoire de Mathématiques et ses Applications de Valenciennes (LAMAV), de l'Université de Valenciennes, France*, 2014.
- [6] B. Ahounou, W. Houedanou, and S. Nicaise. Stability of discretizations of the Stokes-Darcy coupled problem on anisotropic meshes. *Préprint. Rapport de Stage, Laboratoire de Mathématiques et ses Applications de Valenciennes (LAMAV), de l'Université de Valenciennes, France*, 2014.
- [7] B. Ahounou, W. Houedanou, and S. Nicaise. A residual-based posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the Stokes-Darcy coupled problem : Isotropic discretization. *Afr. Mat., African Mathematical Union and Springer-Verlag Berlin Heidelberg : New York*, 27(3) :701–729, 2016.
- [8] M. Ainsworth and J. Oden. A posteriori error estimators for Stokes and Oseen's equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 17 :228–246, 1997.

- [9] M. Ainsworth and J. Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Pure and Applied Mathematics (New York)*. Wiley-Interscience. New York, 2000.
- [10] M. Ainsworth and J. Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Wiley, New York, NY.*, 2000.
- [11] M. Amara, L. Nadau, and D. Trujillo. Estimateurs a posteriori pour une méthode de volumes finis appliquée à des équations linéaires elliptique et parabolique. *Rapport technique, Université de Pau*, 2003.
- [12] T. Apel. *Anisotropic Finite Elements : Local estimates and Applications*. June 9, 1999.
- [13] D. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 21 :337–344, 1984.
- [14] I. Babuška, R. Duřan, and R. Rodriguez. Analysis of the efficiency of an a posteriori error estimator for linear triangular finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29 :947–964, 1992.
- [15] I. Babuška and G. Gatica. A residual-based a posteriori error estimator for the Stokes-Darcy coupled problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48 :498–523, 2010.
- [16] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. Error estimates for adaptative finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 :736–754, 1978.
- [17] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. A posteriori error estimates for the finite element method. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 12 :1597–1615, 1978.
- [18] R. Bank and K. Smith. A posteriori estimates based on hierarchical bases. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30 :921–935, 1993.
- [19] R. Bank and A. Weiser. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Math. Comp.*, 44 :283–301, 1985.
- [20] R. Bank and B. Welfert. A posteriori error estimates for the Stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28 :591–623, 1991.
- [21] G. Beavers and D. Joseph. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.*, 30 :197–207, 1967.
- [22] R. Beck, R. Hiptmair, R. Hoppe, and B. Wohlmuth. Residual based a posteriori error estimators for eddy current computation. *Math. Model. Numer. Anal.*, 34 :159–182, 2000.

- [23] R. Becker, P. Hansbo, and M. Larson. Energy norm a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :723–733, 2003.
- [24] R. Becker and R. Rannacher. A feed-back approach to error control in finite element methods : basic analysis and examples. *East-West J. Numer. Math.*, 4 :237–264, 1996.
- [25] R. Becker and R. Rannacher. An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta numerica.*, 10 :1–102, 2001.
- [26] A. Bergam, Z. Mghazli, and R. Verfürth. Estimations a posteriori d’un schéma de volumes finis pour un problème non linéaire. *Numér. Math.*, 95 :599–624, 2003.
- [27] C. Bernardi and B. Métivet. Indicateurs d’erreur pour l’équation de la chaleur. *Revue européenne des éléments finis*, 4 :425–438, 2000.
- [28] C. Bernardi, B. Métivet, and R. Verfürth. Analyse numérique d’indicateurs d’erreur. *Rapport technique, Université Paris 6*, 1993.
- [29] C. Bernardi and G. Raugel. Analysis of some finite elements for the Stokes problem. *Mathematics of Computation*, 44 :71–79, 1985.
- [30] C. Bernardi and R. Verfürth. Adaptive finite element methods for elliptic equations with non-smooth coefficients. *Numer. Math.*, 85 :579–608, 2000.
- [31] H. Borouchaki and P. Laug. The BL2D mesh generator : Beginner’s guide, user’s and progammer’s manual. 1996. Technical Report RT-0194, INRIA Rocquencourt-78153 Le Chesnay, France.
- [32] M. Braack and A. Ern. A posteriori control of modeling errors and discretization errors. *SIAM J. Multiscale Modeling and Simulation*, 2 :221–238, 2003.
- [33] M. Braack and F. Schieweck. Equal-order finite elements with local projection stabilization for the Darcy-Brinkman equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200 :1126–1136, 2011.
- [34] D. Braess and R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Raviart-Thomas element. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33 :2431–2444, 1996.
- [35] S. Brenner. Korn’s inequalities for piecewise H^1 vector fields. *Math. Comput.*, 73 :1067–1087, 2003.
- [36] F. Brezzi, J. Douglas, R. Duràn, and M. Fortin. Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 21 :581–604, 1987.

- [37] F. Brezzi, J. Douglas, R. Duràn, and M. Fortin. Mixed finite elements for second order elliptic problems in three variables. *Numer. Math.*, 51 :237–250, 1987.
- [38] F. Brezzi, J. Douglas, and L. Marini. Two families of mixed elements for second order elliptic problems. *Numer. Math.*, 88 :217–237, 1985.
- [39] E. Burman, A. Ern, and V. Giovangigli. Bunsen flame simulation by finites elements on adaptively refined, unstructured triangulations. *Combust. Theory modeling*, 8 :65–84, 2004.
- [40] C. Carstensen. A posteriori error estimate for the mixed finite element method. *Math. Comp.*, 66 :465–476, 1997.
- [41] C. Carstensen. A posteriori error estimate for the mixed finite element method. *Math. of Computations*, 66 :465–476, 1997.
- [42] C. Carstensen, T. Gudi, and M. Jensen. A Unifying Theory of a Posteriori Control for Discontinuous Galerkin FEM. *Numer. Math.*, 112 :363–379, 2009.
- [43] C. Carstensen and J. Hu. A unifying theory of a posteriori error control for nonconforming finite element methods. *Numer. Math.*, 107 :473–502, 2007.
- [44] M. J. Castro-Diaz, F. Hecht, B. Mohammadi, and O. Pironneau. Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25(4) :475–491, 1997.
- [45] N. Chen, M. Gunzburger, and X. Wang. Asymptotic analysis of the differences between the Stokes-Darcy system with different interface conditions and the Stokes-Brinkman system. *J. Math. Anal. Appl.*, 368 :658–676, 2010.
- [46] W. Chen and Y. Wang. A posteriori error estimate for $H(\text{div})$ conforming mixed finite element for the coupled Darcy-Stokes system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 255 :502–516, 2014.
- [47] Z. Chen and J. Douglas. Prismatic mixed finite elements for second order elliptic problem. *Calcolo*, 26 :135–148, 1989.
- [48] P. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. *Amsterdam : North-Hollande*, 1978.
- [49] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularisation. *RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 9 :77–84, 1975.
- [50] M. Costabel and M. Dauge. Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 151 :221–276, 2000.
- [51] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Singularities of Maxwell interface problems. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 33 :627–649, 1999.

- [52] E. Creusé, G. Kunert, and S. Nicaise. A posteriori error estimation for the Stokes problem : Anisotropic and isotropic discretizations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14 :1297–1341, 2004.
- [53] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationart Stokes equations I. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge*, pages 33–75, 1973.
- [54] M. Cui and N. Yan. A posteriori error estimate for the Stokes-Darcy system. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 34 :1050–1064, 2011.
- [55] E. Dari, R. Durán, and C. Padra. Error estimators for nonconforming finite element approximations of the Stokes problem. *Math. Comp.*, 64 :1017–1033, 1995.
- [56] M. Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains*, volume 1341 of *Springer-Verlag, Berlin*. Lecture Notes in Mathematics, 1988.
- [57] M. Discacciati, P. Gervasio, and A. Quarteroni. Interface control domain decomposition (ICDD) methods for heterogeneous problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2014.
- [58] M. Discacciati and A. Quarteroni. Navier-Stokes/Darcy coupling : Modeling, analysis, and numerical approximation. *Rev. Math. Comput.*, 22 :315–426, 2009.
- [59] W. Doerfler and M. Ainsworth. Reliable a posteriori error control for nonconforming finite element approximation of Stokes flow. *Math. Comp.*, 74 :1599–1619, 2005.
- [60] G. Duvaut and J. Lions. Inequalities in Mechanics and Physics. *Springer-Verlag, Berlin*, 58 :25–91, 1976.
- [61] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems IV : Nonlinear problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32 :1729–1749, 1995.
- [62] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, and C. Johnson. Introduction to adaptive methods for differential equations. *Acta Numerica. Cambridge University press*, pages 105–108, 1995.
- [63] A. Ern. Aide-mémoire éléments finis. *Dunod, Paris, ISBN 2 10 007303 6*, 2005.
- [64] A. Ern and J. Proft. A posteriori discontinuous Galerkin error estimates for a transient convection-diffusion equations. *Appl. Math. Letters*, 2004. À paraître.
- [65] G. Gatica, R. Oyarzúa, and F.-J. Sayas. A residual-based a posteriori error estimator for a fully-mixed formulation of the Stokes-Darcy coupled problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200 :1877–1891, 2011.

- [66] G. N. Gatica, S. Meddahi, and R. Oyarzúa. A conforming mixed finite element method for the coupling of fluid flow with porous media flow. *IMA J. Numer. Anal.*, 29 :86–108, 2009.
- [67] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations, Theory and algorithms*, volume 5 of *Springer, Berlin*. In Computational Mathematics, 1986.
- [68] P. Grisvard. Théorèmes de traces relatifs à un polyèdre. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.*, 278 :1581–1583, 1974.
- [69] P. Grisvard. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. *Pitman, Boston–London–Melbourne*, 1985.
- [70] A. Hannukainen, R. Stenberg, and M. Vohralik. Unified framework for a posteriori error estimation for the Stokes problem. *Numer. Math.* submitted.
- [71] F. Hecht. The mesh adapting software : bamg. *INRIA report*.<http://www-c.inria.fr/gamma/cdrom/www/bamg/eng.htm>, 1998.
- [72] F. Hecht. Métriques et indicateurs d’erreur. *In cours maillage. Paris, INRIA, CEA, EDF*, Février 2003.
- [73] F. Hecht. A few snags in mesh adaptation loops. *In 14th International Meshing Roundtable. Laboratoire Jacques Louis Lions. université Pierre et Marie Curie, Paris*, Sept 2005.
- [74] R. Hoppe and B. Wohlmuth. Adaptative multilevel techniques for mixed finite element discretizations of elliptic boundary value problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34 :1658–1681, 1997.
- [75] W. Houedanou. Estimation d’erreur a posteriori pour le problème de Stokes stationnaire en dimension deux : discrétisations isotrope et anisotrope. *MASTER II*, Février 2012.
- [76] W. Jäger and A. Mikelić. On the boundary conditions of the contact interface between a porous medium and a free fluid. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 23, 1996.
- [77] W. Jäger and A. Mikelić. On the interface boundary condition of Beavers, Joseph and Saffman. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60 :1111–1127, 2000.
- [78] W. Jäger, A. Mikelić, and N. Neuss. Asymptotic analysis of the laminar visous flow over a porous bed. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22 :2006–2028, 2001.
- [79] C. Johnson. A new paradigm for adaptive finite element methods. *IN J White-man, éditeur, MAFELAP. John Wiley*, 1993.

- [80] C. Johnson and R. Rannacher. On error control in cfd. *Int. Workshop Numerical methods for the Navier-Stokes equations*, 47 :133–144, 1994.
- [81] M. Juntunen and R. Stenberg. Analysis of finite element methods for the Brinkman problem. *Calcolo*, DOI 10.1007/s10092-009-0017-6, 47 :129–147, 2009.
- [82] G. Kanschat and F.-T. Suttmeier. A posteriori error estimates for nonconforming finite element schemes. *Calcolo*, 36 :129–141, 1999.
- [83] O. Karakashian and F. Pascal. A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of second-order problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41 :2374–2399, 2003.
- [84] G. Kunert. A posteriori error estimation for anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes. *Thesis*, 1998.
- [85] G. Kunert. An a posteriori residual error estimation for the finite element method on anisotropic tetrahedral meshes. *Numer. Math., Springer-Verlag*, 86 :471–490, 2000.
- [86] G. Kunert. Robust a posteriori error estimation for a singularly perturbed reaction-diffusion equation on anisotropic tetrahedral meshes. *Advances in Computational Mathematics*, 15 :237–259, 2001.
- [87] J. L. Lions and E. Magenes. Non-homogeneous boundary value problems and applications. *Springer-Verlag, New York-Heidelberg*, 1, 1972.
- [88] C. Lovadina and R. Stenberg. Energy norm a posteriori error estimates for mixed finite element methods. *Math. Comp.*, 75 :1659–1674, 2006.
- [89] S. Nicaise. Analyse numérique et équations aux dérivées partielles : Cours et problèmes résolus. *Dunod, Paris, ISBN 2100049410*, 2000. Posté par Boyaya.
- [90] S. Nicaise and E. Creusé. A posteriori error estimation for the heterogeneous Maxwell equations on isotropic and anisotropic meshes. *Calcolo*, 40 :249–271, 2003.
- [91] J. Nitsche. On Korn’s second inequality. *RAIRO Anal. Numér.*, pages 237–248, 1981.
- [92] F. Nobel. A posteriori error estimates for the finite element approximation of the Stokes problem. *TICAM REPORT*, pages 03–13, 2003.
- [93] L. Payne and B. Straughan. Analysis of the boundary condition at the interface between a viscous fluid and a porous medium and related modeling questions. *J. Math. Pures Appl.*, 77 :317–354, 1998.

- [94] M. Picasso. Numerical study of the effectivity index for an anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator. *Commun Numer. meth. Engrg.*, 19 :13–23, 2003.
- [95] J. Pousin and J. Rappaz. Consistency, stability, a priori and a posteriori errors for Petrov-Galerkin methods applied to nonlinear problems. *Numer. Math.*, 69 :213–232, 1994.
- [96] R. Rannacher. A posteriori error estimation in least-squares stabilized finite element schemes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 166 :99–114, 1998.
- [97] R. Raviart and J. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, in mathematical aspects of the finite element method, lecture notes in math. *Springer-Verlag, New York*, 50 :292–315, 1977.
- [98] H. Rui and R. Zhang. A unified stabilized mixed finite element method for coupling Stokes and Darcy flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198 :2692–2699, 2009.
- [99] P. Saffman. On the boundary condition at the interface of a porous medium. *Stud. Appl. Math.*, 1 :93–101, 1971.
- [100] F. Schieweck. A posteriori error estimates with post-processing for nonconforming finite elements. *Math. Mod. Numer. Anal. (M2AN)*, 36 :489–503, 2002.
- [101] R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of non-smooth function satisfying boundary condition. *Mathematics of Computation*, 54 :483–493, 1990.
- [102] K. G. Siebert. An a posteriori error estimator for anisotropic refinement. *Numer. Math.*, 73 :373–398, 1996.
- [103] S. Sun and M. Wheeler. A posteriori error analysis for symmetric discontinuous Galerkin approximations of reactive transport problem. *Soumis*, 2003.
- [104] C. Taylor and P. Hood. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Internat. J. Comput. Fluids*, 1 :73–100, 1973.
- [105] V. Thomée. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. *Springer-Verlag, Berlin*, 1997.
- [106] D. Vassilev and I. Yotov. Coupling Stokes-Darcy flow with transport. *SIAM J. Sci. Comput.*, 5 :3661–3684, 2009.
- [107] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Stokes equations. *Numer. Math.*, 55 :309–325, 1989.
- [108] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Stokes equations. *Numer. Math.*, 3 :309–325, 1989.

- [109] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Stokes equations II ; nonconforming discretizations. *Numer. Math.*, 60 :235–249, 1991.
- [110] R. Verfürth. A posteriori error estimates for nonlinear problems. finite element discretizations of elliptic equations. *Math. Comp.*, 62 :445–475, 1994.
- [111] R. Verfürth. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *Wiley, Chichester, England*, 1996.
- [112] R. Verfürth. A posteriori error estimators for convection-diffusion equations. *Numer. Math.*, 80 :641–663, 1998.
- [113] R. Verfürth. Error estimates for some quasi-interpolation operators. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M2AN*, 33 :695–713, 1999.
- [114] R. Verfürth. Robust a posteriori error estimates for stationary convection-diffusion equations. *Soumis à SIAM, J. Numer. Anal.*, 2004.
- [115] J. Wang, Y. Wang, and X. Ye. A posteriori error estimation for an interior penalty type method employing H(div) elements for the Stokes equations. *SIAM J. Sci. Comp.*, 33 :131–152, 2011.
- [116] J. Wang, Y. Wang, and X. Ye. A posteriori error estimate for stabilized finite element methods for the Stokes equations. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 9 :1–16, 2012.
- [117] L. J. William, S. Friedhelm, and Y. Ivan. Coupling fluid flow with porous media flow. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(6) :2195–2218 (2003), 2002.
- [118] X. P. Xie, J. C. Xu, and G. R. Xue. Uniformly-stable finite element methods for Darcy-Stokes-Brinkman models. *J. Comput. Math.*, 26 :437–455, 2008.
- [119] X. Xu and S. Zhang. A new divergence-free interpolation operator with applications to the Darcy-Stokes-Brinkman equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 32 :855–874, 2010.

Curriculum Vitæ

Né le 23 Décembre 1985 à Ekpè dans la commune de Sèmè-Podji (Bénin), j'obtiens un Baccalauréat scientifique (Série C) en 2005. De 2005-2009, j'entreprends des études de Mathématiques à l'Université d'Abomey-Calavi où j'obtiens une Maîtrise en Mathématiques. De 2009-2010, je suis Professeur Honoraire de Mathématiques dans les collèges d'Enseignement Général. J'entreprends les études du troisième cycle en 2010 à l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP) au Bénin suite à une bourse financée par le Centre International de la Physique Théorique (Trieste, Italie). J'obtiens en 2011 un Master de Mathématiques Appliquées conjointement dirigé par Serge Nicaise (Professeur à l'Université de Valenciennes, France) et Bernadin Ahounou (Professeur à l'Université d'Abomey-Calavi, Bénin). J'ai commencé effectivement les travaux de thèse de Doctorat en Février 2012 avec les mêmes encadreurs. J'obtiens en 2013, le Prix Ibni Oumar Mahamat Saleh. Ce prix a été proclamé et publié le 03 Février 2014 par Anne Gégout-Petit (Présidente de la Société Française de Statistique), Grégoire Allaire (Président de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles) et Marc Peigné (Président de la Société Mathématique de France). Celui-ci m'a permis de faire un séjour scientifique de trois mois au Laboratoire de Mathématiques et ses Applications de Valenciennes (LAMAV) de l'Université de Valenciennes et de Hainaut Cambresis (UVHC) en France. Mes travaux de recherche portent sur la convergence des méthodes numériques à l'aide d'indicateurs d'erreur a-posteriori.